ПЯТИГОРСКИЙ МЕДИКО-ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Министерства здравоохранения Российской Федерации
Медицинский колледж ПМФИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОЛГОГРАДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
МИНИСТЕРСТВА
ЗДРАВООХРАНЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Подписано цифровой подписью:
ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОЛГОГРАДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
МИНИСТЕРСТВА
ЗДРАВООХРАНЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Дата: 2022.06.10 11:59:51 +03'00'

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ "Математика"
специальность СПО 33.02.01 «Фармация»

Пятигорск, 202___

Методические материалы дисциплины «Математика», относящейся базовой части учебного плана, составленного на основании ФГОС по специальности среднего профессионального образования 33.02.05 Фармации, квалификация выпускника «фармацевт», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «12» мая 2014 г. №501.

Составители УМК:

Доцент	____________________	**С.В. Воронина**
Ст. преподаватель	____________________	**Н.С.Стригун**
Ст. преподаватель	____________________	**Ю.А.Болгова**

УМК переработан, рассмотрен и одобрен на заседании кафедры физики и математики

Протокол №1 от «28» августа 2021 года

Содержание

ПЯТИГОРСКИЙ МЕДИКО-ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Министерства здравоохранения Российской Федерации
Медицинский колледж ПМФИ

Кафедра физики и математики

Авторы: Воронина С.В., Стригун Н.С., Болгова Ю.А.

Методические материалы (указания, разработки, рекомендации) для преподавателей по дисциплине «Математика».

специальность 33.02.01 «Фармация»

Пятигорск 202____

Занятие №1

<u>Тема:</u> Нахождение области определения функции и множество значений функции

<u>Место проведения:</u> аудитория кафедры физики и математики

<u>Время проведения</u>: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

<u>Цели:</u>

Учебные: выработать навыки нахождения пределов функций одной переменной.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения пределов функции одного аргумента.

Студент должен знать: понятия предела функции, понятие бесконечно малой функции, основные теоремы о пределах.

Студент должен уметь: находить простейшие пределы.

Воспитательные:

- способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;
- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
- способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

- создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
- создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
- создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
- содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25

	коэффициентов Стьюдента)			
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие функции.

2. Основные свойства элементарных функции.
3. Область определения и множество значений функций.
4. Четность и нечетность.
5. Периодичность.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия *(на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1.1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2}\left(3x^2 + x - 5\right)$

Решение. Используя теоремы о пределах, находим:

$$\lim_{x \to 2}\left(3x^2 + x - 5\right) = \lim_{x \to 2} 3 \cdot \lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 5 = 9$$

Часто бывает, что функция $y=f(x)$ при $x \to x_0$ не определена, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует. В этом случае для отыскания предела нужно предварительно выполнить преобразование функции.

Пример 1.2. Вычислить $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}$

Решение. Применяя непосредственно теоремы о пределах, имеем:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 6x + 8)}{\lim\limits_{x \to -2} (x + 2)} = \frac{0}{0}$$

Выражение вида $\dfrac{0}{0}$ в математике носит название *неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$. В этом случае для отыскания предела нужно предварительно преобразовать дробь, разложив числитель $x^2 + 6x+8$ на множители: $x^2 + 6x+8 = (x + 2)\cdot(x + 4)$. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c разлагается на множители $ax^2+bx+c=a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения ax^2+bx+c которые определяются по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Тогда

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x+2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+2)\cdot(x+4)}{(x+2)}.$$

Сократив числитель и знаменатель на $x + 2$, получим:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x+4) = 2.$$

Пример 1.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$

Решение. Применив теоремы о пределах, получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель дроби разделим на старшую степень x в знаменателе, т. е. на x и получим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

Так как неопределенность вида $\frac{c}{\infty} \to 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \dfrac{1}{4}$.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. $\lim\limits_{x\to 1} \left(3x^2+x-3\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-4x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+4}{4x^3+2x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРЕДЕЛОМ ФУНКЦИИ $y=f(x)$ ПРИ $x\to a$ НАЗЫВАЕТСЯ
   1) наибольшее значение функции на отрезке *[a, b]*
   2) наименьшее значение функции на отрезке *[a, b]*
   3) такое действительное число $C>0$, что при любом $x>a$ $f(x)<C$
   4) число b, если для $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0$ такое, что для всех $x\in X,\quad x\neq a,$ удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$
   5) число a, если для $\forall\varepsilon>0\quad\exists x_0\in X$ такое, что для всех $x\in X,\quad x>x_0$ выполняется неравенство $|x-a|<\varepsilon$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ФУНКЦИЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКАЯ ФУНКЦИЯ, КОТОРАЯ ПРИ $x\to a$
   1) может стать меньше любого наперед заданного сколь угодно большого по абсолютной величине отрицательного числа
   2) может стать меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа
   3) может стать меньше любого наперед заданного сколь угодно малого отрицательного числа
   4) неограниченно убывает
   5) может стать по абсолютной величине меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа

3. УКАЖИТЕ НЕВЕРНОЕ РАВЕНСТВО
   1) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$
   2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=[\lim\limits_{x\to a}f(x)]^{\varphi(x)}$
   3) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$
   4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}$, если функция $f_2(x)$ не является бесконечно малой

5) $\lim\limits_{x \to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ РАВЕНСТВОМ

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln x$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ МОЖЕТ ИМЕТЬ МЕСТО СЛЕДУЮЩАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

1) $\left[\frac{0}{0}\right]$

2) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

3) $[\infty - \infty]$

4) $\left[\frac{\infty}{0}\right]$

5) $[0 \cdot \infty]$

Ответы:1) 4; 2) 5; 3) 2; 4) 3; 5) 4

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Построение элементарных графиков функций, преобразования графиков».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Вычислить пределы функций:

$a)\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3};$ $\qquad б)\quad \lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2};$

в) $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x};$ $\qquad$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{6x};$

д) $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}.$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции.

Пусть даны два непустых множества *X* и *У*. Соответствие *f*, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in У$, называется *функцией* и записывается $y=f(x)$, или $x \in X$: $X \to У$. Говорят еще, что функция *f отображает* множество *X* на множество *У*.

Например, соответствия *f* и *g*, изображенные на рисунках а) и б), являются функциями, а на рисунках в) и г) – нет. В случае в) – не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in У$. В случае г) не соблюдается условие однозначности.

Множество *X* называется *областью определения* функции *f* и обозначается *D(f)*. Множество всех $y \in У$ называется *множеством значений* функции *f* и обозначается *E(f)*.

Определение предела функции и бесконечно малой функции

Пусть функция *y=f(x)* определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Определение: Число A называется пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Записывается предел функции в точке следующим образом: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрически смысл предела функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая этой δ – окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ – окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. То есть, точки графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A+\varepsilon$, $y = A-\varepsilon$. Величина δ зависит от выбора ε.

Определение: Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Обозначают бесконечно малые функции греческими буквами α, β, γ или $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т. д.

Теорема (о связи бесконечно малой функции и предела). Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет предел, равный числу A, то она может быть представлена в виде $f(x)= A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Справедливо и обратное утверждение*: Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$.*

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы двух функций равен сумме их пределов при условии, что эти пределы существуют:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

Следствие 1. Постоянный множитель может быть вынесен за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^n$.

Теорема 4. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют, и предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)}, \text{если} \lim_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0.$$

Занятие №2

Тема: Построение элементарных графиков функций, преобразования графиков

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: выработать навыки преобразований графиков функций.

Студент должен иметь практический опыт: построения графиков функций.

Студент должен знать: понятие функции, основные свойства функций.

Студент должен уметь: исследовать функции.

Воспитательные:

− способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

− способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

− способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

− создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

− создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4.	доска;	Работа с	Аудитория	25

Самостоятельная работа студентов.	мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	конспектом	кафедры физики и математики	
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Линейная функция.
2. Степенная функция.
3. Показательная функция.
4. Логарифмическая функция.
5. Тригонометрические функции.
6. Правила преобразование графиков функций.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

<u>Примеры.</u> Найти области определения и значений функций:

1. $y = 2x + 5 \;\Rightarrow\; D(y) = R$; $E(y) = R$.
2. $y = \ln|x| \;\Rightarrow\; D(y) = (-\infty;\, 0) \cup (0;\, \infty)$; $E(y) = R$.
3. $y = \sqrt{4 - x^2} \;\Rightarrow\; D(y) = [-2;\, 2]$; $E(y) = [0;\, 2]$.
4. $y = \sqrt{(1 - x^2)(x^2 - 1)} \;\Rightarrow\; D(y) = \{-1;\, 1\}$; $E(y) = \{0\}$.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти область определения функции: Построить график функции:

1. $y=\sqrt{x^2-x-20}+\dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}}$
2. $y=lg\dfrac{x^2-9}{x-2}$
3. $y=\sqrt{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{x-5}$
4. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}}$
5. $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

1. $y=x^2-5|x|+6$
2. $y=|x^2-5x+6|$
3. $y=\dfrac{2}{x}-2$
4. $y=3^{-x}+1$
5. $y=2^{|x|+3}$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ОТВЕТ. ПРЕДЕЛ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ РАВЕН

1) ½
2) 1
3) 0
4) ¼
5) ∞

2. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИИ НА РАЗРЫВ В ТОЧКЕ X_0 МОЖЕТ ИМЕТЬ МЕСТО СЛЕДУЮЩИЕ СЛУЧАИ

1) x_0 – точка непрерывности функции
2) x_0 – точка частичного разрыва функции
3) x_0 – точка устранимого разрыва функции
4) x_0 – точка конечного разрыва функции (1-го рода)
5) x_0 – точка бесконечного разрыва функции (2-го рода)

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ЕСЛИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИИ НА РАЗРЫВ В ТОЧКЕ X_0 ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В ЭТОЙ ТОЧКЕ СУЩЕСТВУЮТ, НО НЕ РАВНЫ, ТО ФУНКЦИЯ В ТОЧКЕ

1) x_0 непрерывна
2) x_0 не определена
3) x_0 терпит устранимый разрыв
4) x_0 терпит конечный разрыв (1-го рода)
5) x_0 терпит бесконечный разрыв (2-го рода)

4. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ОТВЕТ. ФУНКЦИЯ $У=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ В ТОЧКЕ $X=0$

1) непрерывна
2) не определена
3) терпит устранимый разрыв
4) терпит конечный разрыв (1-го рода)
5) терпит бесконечный разрыв (2-го рода)

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ОБЛАДАЕТ СЛЕДУЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

1) алгебраическая сумма или разность непрерывных функций есть непрерывная функция
2) произведение конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция
3) частное от деления двух непрерывных функций есть непрерывная функция за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в ноль
4) при возведении непрерывной функции в степень непрерывность сохраняется
5) непрерывная функция на ограниченном отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значения

Ответы:1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 3; 5) 4

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление производных функций».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Заполнить таблицу «Основные элементарные функции»

№ п/п	*Обозначение функции*	*Область определения*	*Область значений*	*Четность, нечетность*	*Монотонность*	*Периодичность*	*Графики функций*
1.							

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

При изучении определённых процессов реального мира мы встречаемся с характеризующими их величинами, которые меняются во время изучения этих процессов. При этом изменение одной величины сопутствует изменению другой. Например, при прямолинейном равномерном движении связь между пройденным путём *s*, скоростью *v* и временем *t* выражается формулой $s = vt$. При заданной скорости *v* величина пути *s* зависит от времени *t*.

В этом случае изменение одной величины (*t*) произвольно, а другая (*s*) зависит от первой. Тогда говорят, что задана функциональная зависимость. Дадим математическое обоснование этому понятию.

Пусть заданы два множества *X* и *Y*.

Определение. Функцией называется закон или правило, согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, при этом пишут

$y = f(x)$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Элемент $x \in X$ называется аргументом функции *f*, а элемент $y \in Y$ значением функции. Множество *X*, при котором функция определена, называется областью определения функции, а множество *Y* областью изменения функции. Эти множества соответственно обозначаются $D(y)$ и $E(y)$.

Примеры функций:

1. Скорость свободного падения тела $v = gt$. Здесь *X* и *Y* множества действительных неотрицательных чисел.

2. Площадь круга $S = \pi R^2$. Здесь *X* и *Y* множества положитель-ных действительных чисел.

3. Пусть *X* множество студентов группы, т.е. $X = \{$*Иванов*, *Петров*, K , *Сидоров*$\}$, а $Y = \{2, 3, 4, 5\}$ □ множество оценок на экзамене. Здесь в качестве функции *f* рассматривается критерий оценки знаний.

В дальнейшем под множествами *X* и *Y* будем подразумевать множества чисел и придерживаться обозначения $y = f(x)$. Для большей наглядности будем использовать геометрическое представление множеств

$D(y)$ и $E(y)$ в виде множества точек на действительной оси. Рассмотрим некоторые наиболее употребительные числовые множества (промежутки):

$\{x \mid a \le x \le b\} = [a;\, b]$ отрезок;

$\{x \mid a < x < b\} = (a;\, b)$ интервал;

$\{x \mid -\infty < x < \infty\} = R$ числовая ось (множество действительных чисел);

$\{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$ или $\{x \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \mathrm{U}_{\varepsilon}(a)$ окрестность точки a.

Замечание 1. Мы рассмотрели определение однозначной функции. Если же каждому $x \in X$ соответствует по некоторому правилу определённое множество чисел y, то таким правилом определена многозначная функция $y = f(x)$. Например, $y = \pm\sqrt{x}$; $y = (-1)^k \arcsin x + k\pi$.

Способы задания функции

$\boxed{1.}$ Аналитический способ. Прежде всего, функции могут задаваться при помощи формул. Для этого используются уже изученные и специально обозначенные функции и алгебраические действия.

Примеры:

1. $y = \dfrac{\sin x}{x-5} + e^x x^3$. 2. $x^2 + y^2 = 1$. 3. $y = \cos x^2$.

В дальнейшем будем использовать краткие математические обозначения (кванторы): $\forall$ для всех, любых; $\exists$ существует, можно указать.

Напомним некоторые элементы поведения функций. Функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если $\forall\, x_1 < x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) > f(x_2)$ и пишут $f(x)\uparrow$ или $f(x)\downarrow$ соответственно. Возрастающие и убывающие функции называются монотонными. Функция называется ограниченной на некотором промежутке, если $\forall x$ выполняется условие $|f(x)| \le M$. В противном случае функция называется неограниченной.

Функция называется четной (нечетной), если она обладает свойством $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$. Остальные функции называются функциями общего вида.

Функция называется периодической с периодом T, если $\forall x$ выполняется условие $f(x) = f(x+T)$.

Например, функция $y = x^2$ является возрастающей $\forall x \in (-\infty;\ 0)$ и убывающей $\forall x \in (0;\ \infty)$. Функция $y = x^3$ является монотонной $\forall x$. Функция $y = \sin x$ ограничена для $\forall x$, так как $|\sin x| \leq 1$. Функции: $y = x^2$; $y = \cos x$ являются четными, а функции $y = x^3$; $y = \sin x$ нечетными. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом $T = \pi$.

Функция может быть задана и уравнением вида

$$F(x,\ y) = 0. \qquad (1)$$

Если существует такая функция $y = f(x)$, что $F(x,\ f(x)) \equiv 0$, то уравнение (1) определяет функцию заданную неявно. Например, в примере 2 функция $y = f(x)$ задана неявно, это уравнение определяет многозначную функцию $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Пусть $y = F(u)$, а $u = f(x)$, тогда функция $y = F(f(x))$ называется сложной функцией или суперпозицией двух функций F и f. Например, в примере 3 функция $y = \cos x^2$ является суперпозицией двух функций $y = \cos z$ и $u = x^2$.

Если в качестве аргумента рассмотреть переменную y, а в качестве функции – переменную x, то получим функцию, которая называется для однозначной функции $y = f(x)$ обратной и обозначается $x = f^{-1}(y)$. Например, для функции $y = e^x$ обратной функцией служит $x = \ln y$, или $y = \ln x$, если придерживаться общепринятых обозначений аргумента и функции.

Замечание 2. Функция может быть задана и с помощью описания соответствия (описательный способ). Например, поставим в соответствие каждому числу $x \geq 0$ число 1, а каждому $x < 0$ число 0. В результате получим единичную функцию

$$e(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \geq 0; \\ 0, & \forall x < 0. \end{cases}$$

Следует отметить, что всякая формула является символической записью некоторого описанного соответствия и поэтому различие между заданием функции с помощью формул и описания соответствия чисто внешнее.

Графическое изображение функции также может служить для задания функциональной зависимости.

$\boxed{2.}$ Графический способ. Функция задаётся в виде графика. Примером графического задания функции может служить показания осциллографа.

Функцию можно задавать с помощью таблиц:

$\boxed{3.}$ Табличный способ. Для некоторых значений переменной x указываются соответствующие значения переменной y. Примерами такого способа заданий являются таблицы значений тригонометрических функций, таблицы, представляющие собой зависимость между измеряемыми величинами и др.

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Для работы на ЭВМ функцию задают алгоритмическим способом.

Элементарные функции

К основным или простейшим элементарным функциям относятся:

1. Степенная $y = x^k$, где $k \in R$.

2. Показательная $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

3. Логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

4. Тригонометрические: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

Применяя к этим функциям арифметические действия и операцию суперпозиции конечное число раз, будем получать новые более сложные функции, которые называются элементарными.

Например, $y = \ln\left(\sqrt{\cos x} + \dfrac{x^3}{e^{2x}}\right)$.

Иногда полезно использовать так называемые <u>гиперболические</u> функции, которые также относятся к элементарным:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad ; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Легко непосредственно проверить следующие их свойства:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad ; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \quad ; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

Можно заметить, что эти свойства напоминают свойства тригонометрических функций, поэтому они соответственно и называются гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.

Остальные функции относятся к так называемым <u>неэлементарным</u>. Примеры неэлементарных функций:

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \ge 0; \\ x + 1, & x < 0; \end{cases} \qquad y(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное}; \\ 0, & x - \textit{иррациональное}; \end{cases}$$ функция Дирихле;

$y = [x]$ целая часть числа, где x наибольшее целое число, не превосходящее x, например, $[\pi] = 3$; $[\sqrt{2}] = 1$..

Занятие №3

<u>Тема:</u> Вычисление производных функций

<u>Место проведения:</u> аудитория кафедры физики и математики

<u>Время проведения</u>: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

<u>Цели:</u>

Учебные: закрепить приобретенный в школе навык нахождения производных функций одной переменной, выработать навыки нахождения дифференциала функции одной переменной, производных и дифференциалов высших порядков.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного аргумента.

Студент должен знать: понятие приращения аргумента и функции, производной функции, ее геометрический и механический смысл, основные правила дифференцирования и таблицу производных; понятие дифференциала функции, геометрический и аналитический смысл дифференциала, свойства дифференциала.

Студент должен уметь: применять основные правила дифференцирования и таблицу производных при решении примеров, находить дифференциалы функций одной переменной, использовать свойства дифференциалов, находить производные и дифференциалы функций одной переменной.

Воспитательные:

- способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга*;*
- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
- способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

- создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
- создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
- создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
- содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного	Аудитория кафедры физики и математики	5

	инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	уровня.		
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10

	Стьюдента)			
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Производные элементарных функций.
2. Производная произведения.
3. Производная частного
4. Геометрический смысл производно.
5. Физический смысл производной.
6. Производная сложной функции.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Найти производную функции $f(x)=3x^4-4^x+2x-5$.

Решение. $f'(x)=\left(3x^4-4^x+2x-5\right)'=\left(3x^4\right)'-\left(4^x\right)'+(2x)'-(5)'=$

$=3\cdot\left(x^4\right)'-4^x\cdot ln4+2-0=3\cdot 4\cdot x^{4-1}-4^x\cdot ln4+2=12x^3-4^x\cdot ln4+2$.

Пример 2. Найти производную функции $f(x)=\dfrac{ln\,x-4}{e^x}$.

Решение. $f'(x)=\left(\dfrac{ln\,x-4}{e^x}\right)'=\dfrac{(ln\,x-4)'\cdot e^x-\left(e^x\right)'\cdot(ln\,x-4)}{\left(e^x\right)^2}=$

$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot e^x-e^x(ln\,x-4)}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(\frac{1}{x}-ln\,x+4\right)}{e^{2x}}=\dfrac{\frac{1}{x}-ln\,x+4}{e^x}=\dfrac{1-x\,ln\,x+4x}{xe^x}$.

Пример 3. Вычислить $f'(8)$, если $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Решение. Найдем $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Вычислим $f'(8)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{12}$.

Пример 4. Найти дифференциал функции: $f(x)=e^x+2x$.

Решение. На основании свойства 2 дифференциала функции и определения дифференциала имеем:

$$df=d\left(e^x+2x\right)=d\left(e^x\right)+d(2x)=e^xdx+2dx.$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1-2 Найти производные функции

3 Найти производную третьего порядка

№1

1. $y = \cos 2x \cdot 2^x + \sqrt{x} - 4$
2. $y = \dfrac{x^2}{\ln x + 3}$
3. $y = x^2 \ln x$

№2

1. $y = x^4 \log_5 x + 6tg2x + 2$
2. $y = \dfrac{tg2x + 1}{\cos x}$
3. $y = 3\cos 2x + 4x^3 - 6$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ НАЗЫВАЕТСЯ
   1) предел отношения приращения аргумента к приращению функции при стремлении последнего к нулю
   2) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при неограниченном возрастании последнего
   3) предел отношения приращения аргумента к приращению функции при неограниченном возрастании последнего
   4) предел отношения функции к приращению функции при стремлении последнего к нулю
   5) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю

2. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ X_0 ЧИСЛЕННО РАВНА
   1) приращению функции в этой точке
   2) тангенсу угла касательной, образованному с положительным направлением оси ординат, к графику функции в точке x_0
   3) приращению касательной
   4) тангенсу угла касательной, образованному с положительным направлением оси абсцисс, к графику функции в точке x_0
   5) приращению секущей хорды

3. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНО ЗАПИСАННОЕ СВОЙСТВО ПРОИЗВОДНОЙ
   1) $(C)' = 1$
   2) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
   3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = \arcsin x$

1) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

4) $y' = \frac{1}{1+x^2}$

5) $y' = \frac{1}{1-x^2}$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = ctgx$

1) $y' = -tgx$

2) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

3) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

4) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

5) $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$

Ответы:1) 5; 2) 4; 3) 1; 4) 2; 5) 3

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление производной сложной функции».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1-2 Найти производные функции

3 Найти производную третьего порядка

№1

1. $y = sin3x \cdot ln x - x^3 + 6$
2. $y = \dfrac{cos\, x}{x^4 - 2\sqrt{x} + 4}$
3. $y = x cos\, x - x^5$

№2

4. $y = x^4 tg6x - 2 sin x + 1$
5. $y = \dfrac{cos\, x + sin\, x}{x + 1}$
6. $y = xe^{2x} + x^2 - 4$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Производная функции

Пусть функция y=f(x) определена на некотором интервале.

Определение. Приращением аргумента называется разность между двумя значениями аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Разность между двумя значениями функции называется приращением функции: $\Delta y = \Delta f = f(x_0 - x) - f(x_0)$

Определение. Если функция f (x) определенная на промежутке (a; b), то производной функции f(x) в точке $x_0 \in (a;b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению независимого переменного $\Delta x\ (\Delta x = x - x_0)$ при Δx, стремящемся к нулю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Механический смысл производной: мгновенная скорость прямолинейного движения есть производная от пути *S* по времени *t*.

Физический смысл производной: если *y=f(x)* описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x)$ в точке *x* равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна *x*.

Таблица основных формул дифференцирования

1. $(C)'_x = 0$.
2. $(x)'_x = 1$.
3. $(u^n)'_x = n \cdot u^{n-1} \cdot u'_x$; $\qquad (x^n)'_x = n \cdot x^{n-1}$.
4. $(u + v - w)'_x = u'_x + v'_x - w'_x$.
5. $(u \cdot v)'_x = v \cdot u'_x + u \cdot v'_x$.
6. $(c \cdot u)'_x = c \cdot u'_x$; $\qquad \left(\frac{1}{c} \cdot u\right)'_x = \frac{1}{c} \cdot u'_x$.
7. $\left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{v \cdot u'_x - u \cdot v'_x}{v^2}$.
8. $(a^u)'_x = a^u \cdot u'_x \cdot \ln a$; $\qquad (a^x)'_x = a^x \cdot \ln a$.
9. $(e^u)'_x = e^u \cdot u'_x$; $\qquad (e^x)'_x = e^x$.
10. $(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u \cdot \ln a}$; $\qquad (\log_a x)'_x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.
11. $(\lg u)'_x = \frac{u'_x}{u \cdot \ln 10} \approx \frac{u'_x}{u} \cdot 0{,}4343$; $\qquad (\lg x)'_x = \frac{1}{x} \cdot 0{,}4343$.
12. $(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$; $\qquad (\ln x)'_x = \frac{1}{x}$.
13. $(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$; $\qquad (\sin x)'_x = \cos x$.
14. $(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$; $\qquad (\cos x)'_x = -\sin x$.
15. $(tgu)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$; $\qquad (tgx)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
16. $(ctgu)'_x = -\frac{u'_x}{\sin^2 u}$; $\qquad (ctgx)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Дифференциал функции

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента: $dy = df = f'(x) \cdot dx$.

Аналитический смысл дифференциала функции заключается в том, что дифференциал функции, есть главная часть приращения функции *Δf*.

Дифференциал функции отличается от приращения функции на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем Δx. Действительно, $\Delta f = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ или $\Delta f = df + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Свойства дифференциала функции:

1) дифференциал постоянной: $dc = 0$*;*

2) дифференциал суммы. $d(u \pm v) = du \pm dv$*;*

3) дифференциал произведения. $d(uv) = udv + vdu$*;*

4) дифференциал частного. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$*;*

Геометрический смысл дифференциала функции

Дифференциал функции y=f(x) в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

Равенство $\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$ позволяет с большой точностью вычислять приближенно приращение любой дифференцируемой функции; формула $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ используется для вычисления приближенных значений функций.

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' или $f''(x)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производной n –го порядка или n-ой производной называется производная от производной *(n-1)* порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка *M* движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S_t' равна скорости точки в данный момент времени: $S_t' = V$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент $t + \Delta t$ – скорость равна $V + \Delta V$, т. е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV.

Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время

Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки M в данный момент t и обозначается буквой a: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = a, \quad V_t' = a$. Итак, *вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки,* т. е. $S'' = a$.

Дифференциалы высших порядков

Пусть $y=f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x – независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ есть также функция x, можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается $d^2y \;:\; d^2y = d(dy)$.

Дифференциал второго порядка от данной функции равен произведению второго порядка этой функции на квадрат дифференциала независимой переменной: $d^2y = f''(x)dx^2$.

Занятие №4

Тема: Вычисление производной сложной функции

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: закрепить приобретенный в школе навык нахождения производных сложных функций.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного аргумента.

Студент должен знать: понятие производной сложной функции, основные правила дифференцирования и таблицу производных; понятие дифференциала функции, геометрический и аналитический смысл дифференциала, свойства дифференциала.

Студент должен уметь: применять основные правила дифференцирования и таблицу производных при решении примеров, находить производные сложных функций.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга*;*

– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5

3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на		Литература,	Аудитория	5

следующее занятие.		лекции, методические разработки.	кафедры физики и математики	

<u>**Ход занятия**</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие сложной функции.
2. Нахождение производной сложной функции.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Найти производную функции $f(x)=x^2\cdot e^{\sin x}$.

Решение. $f'(x)=\left(x^2\cdot e^{\sin x}\right)'=\left(x^2\right)'\cdot e^{\sin x}+\left(e^{\sin x}\right)'\cdot x^2=$

$$=2x\cdot e^{\sin x}+e^{\sin x}(\sin x)'\cdot x^2=2x\cdot e^{\sin x}+e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot x^2=e^{\sin x}\left(2x+x^2\cos x\right).$$

П р и м е р 2. Найти производную функции: $f(x)=\sqrt{tg\left(e^{x}\right)}$.

Решение. Преобразуем функцию $f(x)=\sqrt{tg\left(e^{x}\right)}=tg^{\frac{1}{2}}\left(e^{x}\right)=\left(tg\left(e^{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда: $f'(x)=\left(\left(tg\left(e^{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}tg^{\frac{1}{2}-1}\left(e^{x}\right)\cdot\left(tg\left(e^{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}tg^{-\frac{1}{2}}\left(e^{x}\right)\cdot\frac{1}{cos^{2}\left(e^{x}\right)}\cdot\left(e^{x}\right)'=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{tg^{\frac{1}{2}}\left(e^{x}\right)}\cdot\frac{1}{cos^{2}\left(e^{x}\right)}\cdot e^{x}=\frac{e^{x}}{2\sqrt{tg\left(e^{x}\right)}}\cdot\frac{1}{cos^{2}\left(e^{x}\right)}.$$

П р и м е р 3. Найти дифференциал функции: $f(x)=ln(cos\,x)$

Решение. Функцию можно записать в виде: $f(x)=\boldsymbol{ln}u$, $u=\boldsymbol{cos}\,x$. *Тогда имеем:*

$$df=(lnu)'_{u}\cdot du=\frac{1}{u}d(cos\,x)=\frac{1}{cos\,x}(-sin\,x)dx=-\frac{sin\,x}{cos\,x}dx=-tgxdx$$

П р и м е р 4. Найти вторую производную функции: $f(x)=\boldsymbol{ln}\frac{1+2x}{1-2x}$

Решение. Преобразуем функцию $f(x)=ln\frac{1+2x}{1-2x}=ln(1+2x)-ln(1-2x)$.

Найдем первую производную: $f'(x)=(ln(1+2x)-ln(1-2x))'=$

$$=(ln(1+2x))'-(ln(1-2x))'=\frac{1}{1+2x}\cdot(1+2x)'-\frac{1}{1-2x}\cdot(1-2x)'=$$

$$=\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{1-2x}=\frac{2(1-2x)+2(1+2x)}{1-4x^{2}}=\frac{4}{1-4x^{2}};$$

найдем вторую производную:

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{4}{1-4x^{2}}\right)'=4\left(\left(1-4x^{2}\right)^{-1}\right)'=-4\left(1-4x^{2}\right)^{-2}\cdot\left(1-4x^{2}\right)'=$$

$$=-4\left(1-4x^{2}\right)^{-2}\cdot(-8x)=\frac{32x}{\left(1-4x^{2}\right)^{2}}.$$

П р и м е р 5. Найти дифференциал второго порядка от функции $f(x)=sin(2x+3)$.

Решение. Найдем дифференциал второго порядка на основании выражения для вычисления $d^2 f$:

$d^2 f = f''(x)dx^2 = (sin(2x+3))'' dx^2$. Найдем сначала первую производную:

$f'(x) = (sin(2x+3))' = cos(2x+3)(2x+3)' = 2cos(2x+3)$; найдем вторую производную: $f''(x) = (2cos(2x+3))' = -2sin(2x+3)(2x+3)' = -4sin(2x+3)$.

Тогда $d^2 f = f''(x)dx^2 = -4sin(2x+3)dx^2$.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти производные функций:

1. $f(x) = \sqrt{2x - \mathbf{ln}\, x}$.
2. $f(x) = \mathbf{sin}\sqrt{x}$.
3. $f(x) = \mathbf{ln}\dfrac{1+x}{1-x}$.

Найти дифференциал функции:

4. $f(x) = ln(sin\, x)$.
5. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$.
6. $f(x) = xe^{x^2+1}$.

Найти вторые производные следующих функций:

7. $f(x) = e^{x^2}$.

Найти производные второго порядка и записать дифференциалы второго порядка для следующих функции:

8. $f(x) = 2x\,\mathbf{cos}\, x$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = a^x$

1) $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

2) $y' = a^x$

3) $y' = \dfrac{\ln a}{x}$

4) $y' = \dfrac{a^x}{\ln a}$

5) $y' = a^x \cdot \ln a$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = a \cdot \sqrt{1+x^2}$

1) $y' = \dfrac{2ax}{\sqrt{1+x^2}}$

2) $y' = \dfrac{a'\sqrt{1+x^2} - \dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

3) $y' = \dfrac{ax}{2\sqrt{1+x^2}}$

4) $y' = \dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$

5) $y' = -\dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$

3. ПУСТЬ *U(X)* И V(X) – ДВЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО НЕЗАВИСИМОГО АРГУМЕНТА. УКАЖИТЕ, ДЛЯ КАКОГО ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ ТИПОВ ФУНКЦИЙ ПРИМЕНЯЕТСЯ МЕТОД ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1) $y = u(x) \cdot v(x)$

2) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

3) $y = \ln[u(x) \cdot v(x)]$

4) $y = u(x)^{v(x)}$

5) $y = a^{u(x)} \cdot b^{v(x)}$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНУЮ ФОРМУЛУ, ПО КОТОРОЙ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПРОИЗВОДНАЯ 1-ГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

1) $y'(x) = \dfrac{x'(t)}{y'(t)}$

2) $y'(t) = \dfrac{x'(x)}{y'(x)}$

3) $y'(x) = \dfrac{y'(t) \cdot x(t) - x'(t) \cdot y(t)}{[x'(t)]^2}$

4) $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

5) $y'(t) = \dfrac{y'(x)}{x'(x)}$

5. УКАЖИТЕ, ДЛЯ КАКОЙ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫПОЛНЯЕТСЯ РАВЕНСТВО $y''' = \dfrac{2}{x^3}$

1) $y = \ln x$

2) $y = \dfrac{1}{x}$

3) $y = \dfrac{2}{x}$

4) $y = -\ln x$

5) $y = -2x^{-1}$

Ответы:1) 4; 2) 4; 3) 4; 4) 4; 5) 1

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Определить производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

а) $y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y=(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x)^3$; в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{x^3-6x}}$;
д) $y=(2x+3)^{tgx}$.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Производная сложной функции

Теорема (о производной сложной функции): Если функция $u=g(x)$ имеет производную $u'(x)=g'(x)$ в точке x, а функция $y=f(u)$ – производную $y'_u=f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f(g(x))$ в данной точке x имеет производную $y'_x=F'(x)$, которая находится по формуле $y'_x=f'(u)\cdot u'(x)$.

Таблица основных формул дифференцирования

1. $(C)'_x=0$.
2. $(x)'_x=1$.
3. $(u^n)'_x=n\cdot u^{n-1}\cdot u'_x$; $\quad (x^n)'_x=n\cdot x^{n-1}$.
4. $(u+v-w)'_x=u'_x+v'_x-w'_x$.
5. $(u\cdot v)'_x=v\cdot u'_x+u\cdot v'_x$.
6. $(c\cdot u)'_x=c\cdot u'_x$; $\quad \left(\frac{1}{c}\cdot u\right)'_x=\frac{1}{c}\cdot u'_x$.
7. $\left(\frac{u}{v}\right)'_x=\frac{v\cdot u'_x-u\cdot v'_x}{v^2}$.
8. $(a^u)'_x=a^u\cdot u'_x\cdot \ln a$; $\quad (a^x)'_x=a^x\cdot \ln a$.
9. $(e^u)'_x=e^u\cdot u'_x$; $\quad (e^x)'_x=e^x$.
10. $(\log_a u)'_x=\frac{u'_x}{u\cdot \ln a}$; $\quad (\log_a x)'_x=\frac{1}{x\cdot \ln a}$.

11. $(\lg u)'_x = \dfrac{u'_x}{u \cdot \ln 10} \approx \dfrac{u'_x}{u} \cdot 0{,}4343;$ $\qquad$ $(\lg x)'_x = \dfrac{1}{x} \cdot 0{,}4343.$

12. $(\ln u)'_x = \dfrac{u'_x}{u};$ $\qquad$ $(\ln x)'_x = \dfrac{1}{x}.$

13. $(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x;$ $\qquad$ $(\sin x)'_x = \cos x.$

14. $(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x;$ $\qquad$ $(\cos x)'_x = -\sin x.$

15. $(tgu)'_x = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x;$ $\qquad$ $(tgx)'_x = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

16. $(ctgu)'_x = -\dfrac{u'_x}{\sin^2 u};$ $\qquad$ $(ctgx)'_x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Дифференциал сложной функции. Дифференциал сложной функции (функции от функции) равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента(при условии, что обе функции дифференцируемы): $df = y'_u du$*, где* $y = f(g(x))$*, и функции* $y = f(u)$*,* $u = g(x)$ *– дифференцируемые функции своего аргумента.*

Занятие №5

Тема: Возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: научить применять дифференциальное исчисление для решения прикладных задач химии, биологии и фармации.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного аргумента при решении прикладных задач.

Студент должен знать: необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции, необходимое и достаточное условие экстремума функций.

Студент должен уметь: решать прикладные задачи на применение дифференциального исчисления.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга*;*

- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
- способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

- создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
- создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
- создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
- содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Хронокарта занятия

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел;	Таблицы, методические разработки для	Аудитория кафедры физики и	30

	чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	студентов	математики	
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*: **контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Экстремумы функции.
2. Промежутки возрастания и убывания функции.
3. Наименьшее и наибольшее значение функции.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = 0{,}01x^3$, проведенной в точке с абсциссой $x=2$.

Решение. На основании геометрического смысла производной имеем, что угловой коэффициент равен производной функции в точке, абсцисса которой равна x. Найдем $y' = \left(0{,}01x^3\right)' = 0{,}03x^2$.

Вычислим $k = y'(2) = 0{,}03 \cdot 2^2 = 0{,}12$ – угловой коэффициент касательной к графику функции.

П р и м е р 2. Популяция бактерий в момент времени t (t измеряется в часах) насчитывает $p(t) = 3000 + 100t^2$ особей. Найти скорость роста бактерий. Найти скорость роста бактерий в момент времени $t = 5$ часов.

Решение. Скорость роста популяции бактерий – это первая производная $p(t)$ по времени t: $p'(t) = \left(3000 + 100t^2\right)' = 200t$.

Если $t = 5$ часов, то $p'(5) = 200 \cdot 5 = 1000$. Следовательно, скорость роста бактерий составит 1000 особей в час.

П р и м е р 3. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Если x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y = x^2(1 - x)$. При каком значении x реакция максимальна?

Решение. Найдем производную $y' = \left(x^2 - x^3\right)' = 2x - 3x^2$.

Найдем критические точки: $2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - 3x) = 0. \Rightarrow$ Следовательно, имеем две критические точки: $x_1 = 0;$ $x_2 = \frac{2}{3}$. Значение $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Найдем вторую производную $y'' = \left(2x - 3x^2\right)' = 2 - 6x$. Вычислим значение второй производной при $x = \frac{2}{3}$. $y''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 6 \cdot \frac{2}{3} = -2 < 0$. Значит, $x = \frac{2}{3}$ – уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

П р и м е р 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

Решение. Находим производную $f'(x) = \left(3x - x^3\right)' = 3 - 3x^2$; $3 - 3x^2 = 0$, то есть $x = \pm 1$ – критические точки. Определяем значения функции в этих точках: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Вычисляем значения данной функции на границах промежутка: $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее – 18. Можно записать ответ в виде:

$\max\limits_{[-2,3]} f(x) = f(1) = f(-2) = 2; \qquad \min\limits_{[-2,3]} f(x) = f(3) = -18.$

Пример 5. Исследовать функцию на экстремум $y = x^4 - 2x^2$.

Решение.

Область определения функции – вся числовая ось;

Найдем производную функции: $y' = \left(x^4 - 2x^2\right)' = 4x^3 - 4x$. Найдем критические точки функции, решив уравнение $y' = 0$: $4x^3 - 4x = 0$. Следовательно $4x\left(x^2 - 1\right) = 0$: $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm 1$.

Определим интервалы возрастания и убывания:

– рассмотрим интервал $(-\infty; -1)$, определим знак производной в точке интервала $y'(-2) = -8 \cdot 3 = -24 < 0$ – на этом интервале функция убывает;

– рассмотрим интервал $(-1; 0)$, найдем $y'(-0,5) = -2 \cdot (-0,75) = 1,5 > 0$ – на этом интервале функция возрастает;

– рассмотрим интервал $(0; 1)$, найдем $y'(0,5) = 2 \cdot (-0,75) = -1,5 < 0$ – на этом интервале функция убывает;

– рассмотрим интервал $(1; +\infty)$, определим знак производной в точке интервала $y'(2) = 8 \cdot 3 = 24 > 0$ – на этом интервале функция возрастает;

Тогда точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки минимума, причем $y(-1) = y(1) = -1$, а точка $x=0$, $y(0) = 0$ – точка максимума.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти точки экстремума функций:

1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$;
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^2 - 6x$ на отрезке $[0; 3]$.
3. Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума и точки пересечения с осями: $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
4. Закон движения точки имеет вид $s(t) = t - sin t$. Определить закон скорость и ускорение этой точки.
5. Уравнение движения точки имеет вид $s(t) = 4 + 2t + t^2 + 0,21t^3$ (м).

Найти 1) положение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с; 2) среднюю скорость за время, прошедшее между этими моментами времени; 3) мгновенные скорости в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения в указанные моменты времени.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ОТВЕТ. ЕСЛИ ДЛЯ ЛЮБЫХ ДВУХ ТОЧЕК ДАННОГО ИНТЕРВАЛА ИЗ НЕРАВЕНСТВА $x_2 > x_1$ СЛЕДУЕТ НЕРАВЕНСТВО $f(x_2) < f(x_1)$, ТО В КАЖДОЙ ТОЧКЕ ЭТОГО ИНТЕРВАЛА

    1) $y' > 0$

    2) $y' < 0$

    3) $y' = 0$

    4) $y'' > 0$

    5) $y'' < 0$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАЗБИВАЕТСЯ НА ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ

    1) точками разрыва функции
    2) нулями функции
    3) критическими точками функции
    4) точками перегиба функции
    5) точками, в которых производная функции второго порядка равна нулю

3.УКАЖИТЕ ИНТЕРВАЛ ИЛИ ИНТЕРВАЛЫ, НА КОТОРЫХ ФУНКЦИЯ $y = -(x^2 - 4x)^3$ МОНОТОННО УБЫВАЕТ

1) (2; +∞)

2) (-∞; 2)

3) (-∞; 0) $\cup$ (2; 4)

4) (0; 2) $\cup$ (4; +∞)

5) (-∞; +∞)

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ *X* ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ X_0 ВЫПОЛНЯЕТСЯ НЕРАВЕНСТВО $f(x) > f(x_0)$, ТО В ТОЧКЕ X_0 ФУНКЦИЯ ИМЕЕТ

1) критическую точку
2) точку перегиба
3) точку локального максимума
4) точку локального минимума
5) нуль функции

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ТОЧКА X_0 ЯВЛЯЕТСЯ ТОЧКОЙ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА В ОДНОМ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ СЛУЧАЕВ

1) $f'(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0) > 0$

2) $f'(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0) < 0$

3) $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с «+» на «-»

4) $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с «-» на «+»

5) $f'(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0) = 0$

Ответы:1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 4; 5) 5

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Нахождение частных производных функции двух переменных».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

1. $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.   2. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Приложение дифференциального исчисления

Функция называется возрастающей (убывающей) на интервале $(a;\ b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Необходимое условие возрастания (убывания): Если дифференцируемая функция на интервале $(a,\ b)$ возрастает (убывает), то производная этой функции неотрицательна (неположительна) в этом интервале $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Достаточное условие возрастания (убывания): Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого интервала, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет максимум, если для любого x из некоторой окрестности точки выполняется неравенство: $f(x_1)>f(x)$, при $x \neq x_1$.

Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет минимум, если для любого x из некоторой окрестности точки выполняется неравенство: $f(x_1)<f(x)$, при $x \neq x_1$.

Экстремум функции называют локальным экстремумом, так как понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_1. Так что на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может случиться, что минимум в одной точке больше максимума в другой. Наличие максимума или минимума в отдельной точке интервала не означает, что в этой точке функция *f(x)* принимает наибольшее или наименьшее значение на этом интервале.

Необходимое условие экстремума: В точке экстремума дифференцируемой функции ее производная равна нулю.

Достаточное условие экстремума: Если производная дифференцируемой функция в некоторой точке x_0 равна нулю и меняет свой *знак при переходе через это значение, то число $f(x_0)$ является экстремумом функции, причем если изменение знака происходит с плюса на минус, то максимум, если с минуса на плюс, то минимум.*

Точки, в которых производная непрерывной функции равна нулю или не существует, называются критическими.

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Правило исследования функции на экстремум:

1). Найти критические точки функции $y = f(x)$ и выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

2). Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;

3). На основании достаточного условия экстремума выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

Для того чтобы найти *наибольшее и наименьшее значение* функции на отрезке необходимо выполнить несколько этапов:

1). Найти критические токи функции, решив уравнение f'(x)=0.

2). Если критические точки попали на отрезок, то необходимо найти значения в критических точках и на границах интервала. Если критические точки не попали на отрезок (или их не существует), то находят значения функции только на границах отрезка.

3). Из полученных значений функции выбирают наибольшее и наименьшее и записывают ответ, например, в виде: $\max\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_1) = f_1$; $\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_2) = f_2$.

Занятие №6

Тема: Нахождение частных производных функции двух переменных

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: научиться находить частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного и нескольких аргументов при решении прикладных задач.

Студент должен знать: понятие функции двух переменных; понятие частных производных функции двух переменных; понятие полного и частных дифференциалов функции нескольких переменных.

Студент должен уметь: находить производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;
– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5

	коэффициентов Стьюдента)			
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные	Аудитория кафедры физики и математики	10

		задачи.		
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Функции нескольких аргументов.
2. Частные производные функции двух переменных.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример.1. Найти частные производные функций:

1). $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$;

2). $z = e^{x^2+y^2}$.

Решение. 1) рассматривая y как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3y-1$, рассматривая x как постоянную величину, найдем: $\frac{\partial u}{\partial y}=-3x-8y+2$.

2) пусть y – $const$, получим $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x=2x\cdot e^{x^2+y^2}$,

пусть x – $const$, получим $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y=2y\cdot e^{x^2+y^2}$.

П р и м е р 2. Реакция на инъекцию x единиц лекарственного препарата описывается функцией $y=x^2(a-x)\cdot te^{-t}$, где t выражается в часах с момента инъекции, a – некоторая константа. Найти частные производные $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\left(x^2(a-x)\cdot te^{-t}\right)'_x=te^{-t}\cdot\left(x^2(a-x)\right)'_x=te^{-t}\left(2ax-3x^2\right);$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\left(x^2(a-x)\cdot te^{-t}\right)'_t=x^2(a-x)\cdot\left(te^{-t}\right)'_t=x^2(a-x)(1-t)e^{-t}.$$

П р и м е р 3. Для функции $z=y\ln x$ найти производные второго порядка.

Решение. Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x$.

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{-y}{x^2};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln x)=0;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

П р и м е р 4. Найти полный дифференциал функций:

1). $z=\frac{x+y}{x-y}$;

2). $u=x^{y^2z}$.

Решение. 1) Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{(x-y)^2}.$$

Следовательно, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-2ydx - 2xdy}{(x-y)^2}$.

2) найдем частные производные по переменным *x, y* и *z*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2,$$

следовательно

$$du \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \cdot \ln x dz$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти частные производные функций:

1. $z = x^2 + xy + 1$.
2. $z = -5x^2 + 2xy + y^2 - \ln x + y + 6$.
3. $z = 2^{3x^2 + 2y^3}$.
4. $z = \cos\left(x + y^2\right)$.

Найти все частные производные второго порядка функции:

5. $z = x^4 + 3x^3 y - y^3$.
6. $z = x^2 + y^2 + 2x + 1$.

Найти частные и полный дифференциал для следующих функций:

7. $z = \ln(x^2 + y^2)$.
8. $z = x^y$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ФУНКЦИЕЙ Z ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ X И Y НАЗЫВАЕТСЯ

1) Формула, представляющая собой аналитическое выражение с двумя переменными x и y для нахождения значений z
2) Зависимость переменной z от значений переменных x и y
3) Соответствие значений переменной z значениям переменных x и y
4) Закон, по которому определяются значения переменной z в зависимости от значений переменных x и y
5) Переменная z, если каждой паре чисел (x, y) соответствует определенное значение величины z

2. УКАЖИТЕ, КАКОЙ ТЕРМИН НЕ ПРИМЕНЯЕТСЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ МОЖЕТ БЫТЬ

1) Открытой
2) Незамкнутой
3) Конечной
4) Ограниченной
5) Неограниченной

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ $Z=LN(X+Y)$

1) Часть плоскости xOy, расположенная выше прямой $y=x$, точки прямой входят
2) Часть плоскости xOy, расположенная выше прямой $y=x$, точки прямой не входят
3) Часть плоскости xOy, расположенная выше прямой $y=-x$, точки прямой входят
4) Часть плоскости xOy, расположенная выше прямой $y=-x$, точки прямой не входят
5) Часть плоскости xOy, расположенная выше оси Ox, точки оси не входят

4. УКАЖИТЕ НЕВЕРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ. ФУНКЦИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ МОЖЕТ БЫТЬ ЗАДАНА

1) Словесным описанием
2) Таблично
3) Графически
4) Аналитически
5) Алгоритмически

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ ФУНКЦИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ $Z=F(X, Y)$ БЫЛА НЕПРЕРЫВНА В ТОЧКЕ $M(X_0, Y_0)$ НЕОБХОДИМО, ЧТОБЫ

1) Функция была определена во всех точках некоторой окрестности точки М
2) Функция была определена в точке М
3) Функция была не равна нулю в точке М
4) Существовал предел функции при $x \to x_0, y \to y_0$
5) Предел функции при $x \to x_0, y \to y_0$ был равен значению функции в точке М

Ответы:1) 5; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) 3

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление интеграла методом непосредственного интегрирования».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. Дана функция $z = \arcsin \frac{x-y}{x+y}$. Показать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

2. Дана функция $z = x \ln \frac{y}{x}$. Показать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Основные понятия

Переменная z называется функцией двух аргументов x и y, если некоторым парам значений (x,y) по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение z. Функция двух аргументов обозначается $z=f(x,y)$.

Функция $z=f(x,y)$задается в виде поверхности в прямоугольной системе координат в пространстве. Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек трехмерного пространства *(x, y, z)*, аппликата z которых связана с абсциссой *x* и ординатой *y* функциональным соотношением $z=f(x,y)$.

Рассмотрим функцию *z=f(x,y)*. Дадим аргументу х приращение *Δx,* а аргументу *y* – приращение *Δy*. Тогда функция z получит наращенное значение $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Величина $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ называется полным приращением функции в точке (x,y). Частным приращением по переменной *x* называется величина: $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$. Аналогично определяется частное приращение по переменной y: $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

Частные производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Частной производной от функции $z=f(x,y)$ по независимой переменной x называют конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$,

вычисленный при постоянном y. Обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x.

Частной производной от функции $z=f(x,y)$ по независимой переменной y называют конечный предел $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$,

вычисленный при постоянном x. Обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y.

Пусть функция *z=f(x,y)* имеет две непрерывные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Произведение $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ *называется частным дифференциалом функции z=f(x,y) по x и обозначаются* $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$.

Произведение $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ *называется частным дифференциалом функции z=f(x,y) по x и обозначаются* $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Полный дифференциал функции

Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращение соответствующих независимых переменных, т. е. $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$. *Так как* $df = dx = \Delta x$ и $df = dy = \Delta y$ тогда можно записать: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Частные производные второго порядка

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Так как производные являются функциями аргументов x и y, то можно найти производные от этих функций. *Частные производные этих функций называются частными производными второго порядка (вторыми частными производными) данной функции* $z = f(x,y)$.

Так, для функции $z = f(x, y)$ двух аргументов *x* и *y* (предполагается, что все производные первого порядка существуют) частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ называются смешанными частными производными второго порядка.

Занятие №7

<u>Тема:</u> Вычисление интеграла методом непосредственного интегрирования

<u>Место проведения:</u> аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: закрепление понятия неопределенного интеграла; овладение способами и методами интегрирования.
Студент должен иметь практический опыт: нахождения простейших интегралов.

Студент должен знать: понятие первообразной функции, определение неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла; свойства интеграла; сущность методов интегрирования.

Студент должен уметь: применять основные формулы интегрирования при нахождении интегралов методом непосредственного интегрирования; использовать свойство инвариантности неопределенного интеграла, применять методы интегрирования.

Воспитательные:

- способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;
- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
- способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

- создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
- создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
- создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
- содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Хронокарта занятия

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства	Место проведения	Время в мин.

		контроля		
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25

5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Первообразная, правила нахождения первообразных.
2. Неопределенный интеграл.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Метод непосредственного интегрирования.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Найти интегралы:

1) $\int\left(\frac{5x^2+2}{x}+3\right)dx$.

Решение. 1) Применяя свойства 4 и 5 неопределенного интеграла, а также алгебраические преобразования сведем интеграл к трем табличным интегралам:

$$\int\left(\frac{5x^2+2}{x}+3\right)dx=\int\left(5x+\frac{2}{x}+3\right)dx=\int 5xdx+\int\frac{2}{x}dx+\int 3dx=$$

$$=5\int xdx+2\int\frac{1}{x}dx+3\int dx=5\frac{x^2}{2}+2\,ln|x|+3x+C\,;$$

Пример 2. Найти интегралы:

1) $\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx$.

2) $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\,dx$.

Решение: 1) Применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx=2\int x^3dx-5\int x^2dx+7\int xdx-3\int dx=\frac{2x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-3x+C$$

2) Воспользуемся формулой сокращенного умножения для преобразования подынтегральной функции и применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx=\int\left(x+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}})dx=$$

$$=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\cdot\sqrt[6]{x}+3\cdot\sqrt[3]{x}+C.$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти интегралы

1. $\int\frac{6x^3-8x+5}{x^2}dx.$
2. $\int\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$
3. $\int tgxdx.$
4. $\int(x^4+4^x)dx.$
5. $\int\frac{x^3-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx.$
6. $\int\frac{sin2x}{sinx}dx.$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ, КАКИМ ИЗ СВОЙСТВ НЕ ОБЛАДАЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1) $\int C\cdot f(x)dx=C\cdot\int f(x)dx$

2) $\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$

3) $\int\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\cdot\int f_2(x)dx$

4) $\int dx = x + C$

5) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. УКАЖИТЕ, ЗНАЧЕНИЕМ КАКОГО ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЯ $\ln|\sin x| + C$

1) $\int \frac{dx}{\sin x}$

2) $\int \frac{dx}{\cos x}$

3) $\int tgx \cdot dx$

4) $\int ctgx \cdot dx$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int x^a dx$

1) $x^a \cdot \ln a + C$

2) $\frac{x^a}{\ln a} + C$

3) $a \cdot \ln|x| + C$

4) $a \cdot x^{a-1} + C$

5) $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

4. УКАЖИТЕ, ПЕРВООБРАЗНОЙ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КАКОГО ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЯ $\arcsin\frac{u}{a}$

1) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}}$

2) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$

3) $\int \sqrt{a^2 - u^2}du$

4) $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$

5) $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ПОДВЕДЕНИЕ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА. ДИФФЕРЕНЦИАЛ $d(ax^2 + b)$ РАВЕН

1) $a \cdot dx$

2) $x \cdot dx$

3) $ax \cdot dx$

4) $2ax \cdot dx$

5) $\frac{1}{a} dx$

Ответы:1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 2; 5) 4

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление интеграла методом подстановки».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{8x^4 + 5}{x} dx$	2. $\int \frac{9x^2 - 5x}{x} dx$	3. $\int \frac{9x^6 - x^3}{x} dx$
4. $\int \frac{8x^8 + 5}{x^3} dx$	5. $\int (6x^2 + 7\cos x) dx$	6. $\int (6x^5 + 7\sin x) dx$
7. $\int (15x^9 - 7\cos x) dx$	8. $\int (x^8 + 8\sin x) dx$	9. $\int \sqrt{x^5} dx$
10. $\int \sqrt[5]{x^2} dx$	11. $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} dx$	12. $\int \sqrt[7]{x^9} dx$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Основные понятия

Восстановление функции по известной производной этой функции основная задача интегрального исчисления (т.е. найти функцию *F(x),* зная ее производную или дифференциал).

Первообразной функцией для данной функции f(x) на интервале называется такая функция F(x), производная которой равна f(x) или дифференциал которой равен f(x)dx на рассматриваемом интервале.

Теорема. Если функция F(x) является первообразной для функции f(x) на некотором интервале, то множество всех первообразных для f(x) задается формулой F(x)+C, где C – постоянное число:

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных функций F(x)+C для f(x) или f(x)dx называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом можно записать $\int f(x)dx = F(x)+C$, *если F'(x)=f(x).*

Свойства неопределенного интеграла

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.* $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.* $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. *Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C, т. е.* $\int dF(x) = F(x)+C$.

4. *Постоянный множитель не равный нулю можно вынести за знак неопределенного интеграла, т. е.* $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ \ k \neq 0$.

5. *Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых, т. е.*

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int\left(f_2(x)\right)dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int dx = x + C$;

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$

3. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$, при $x \neq 0$;

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1;$

5. $\int e^x dx = e^x + C$;

6. $\int sin\, x dx = -cos\, x + C$;

7. $\int cos\, x dx = sin\, x + C$;

8. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$;

9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$;

10. $\int 0 dx = C$.

Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и использовании свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Занятие №8

Тема: Вычисление интеграла методом подстановки

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: закрепление понятия неопределенного интеграла; овладение способами и методами интегрирования.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения простейших интегралов.

Студент должен знать: понятие первообразной функции, определение неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла; свойства интеграла; сущность методов интегрирования.

Студент должен уметь: применять основные формулы интегрирования при нахождении интегралов методом непосредственного интегрирования; использовать свойство инвариантности неопределенного интеграла, применять методы интегрирования.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов,	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5

	дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)			
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий	программа компьютерного	Тестовые задания по	Аудитория кафедры	10

на контроль усвоения.	тестирования Veral Test	данной теме, ситуационные задачи.	физики и математики	
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Неопределенный интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Основные способы интегрирования.
4. Метод подстановки (замены переменной интегрирования).

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

П р и м е р 1. Найти интегралы:

1) $\int e^{\frac{x}{4}}dx$. 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. 1) Введем замену: пусть *x=4t,* тогда *dx=d(4t)=4dt*. Следовательно, можем записать:

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx = \int e^t 4dt = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

2) Положим $t = 1 + x^2$. Тогда $dt = d\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)' dx = 2xdx$, следовательно $dx = \frac{1}{2}dt$. Можем записать:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x\frac{1}{2x}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

Пример 3. Найти интегралы:

1) $\int (2x+1)^{20}dx$.

2) $\int x^2\sqrt{x^3+5}\ dx$;

Решение:

1) Этот интеграл можно найти с помощью замены переменной. Полагая $2x+1=t$, имеем $2dx = dt$, т.е. $dx = (1/2)dt$. Отсюда получим

$$\int (2x+1)^{20}dx = \frac{1}{2}\int t^{20}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21} + C = \frac{1}{42}(2x+1)^{21} + C.$$

2) Введем подстановку: $x^3 + 5 = t,\quad 3x^2dx = dt \ \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{3}$

$$\int \frac{1}{3}\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+5)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+5)(\sqrt{x^3+5}) + C$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти интегралы

1. $\int \sin 8x dx$
2. $\int 9^{2x+11} dx$
3. $\int \frac{9dx}{(1-5x)^4}$
4. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
5. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^5 x}$
6. $\int \frac{xdx}{7-x^2}$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \frac{dx}{tg^3 x \cdot \cos^2 x}$

1) $-\frac{1}{2 \cdot tg^2 x} + C$

2) $\frac{1}{4} tg^4 x + C$

3) $\ln | tgx | + C$

4) $\ln | tg^3 x | + C$

5) $\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНУЮ ЗАМЕНУ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$

1) $\sqrt{x^4+1} = t; \quad \frac{2x^3 dx}{\sqrt{x^4+1}} = dt$

2) $x^4 + 1 = t^2; \quad x^3 dx = \frac{1}{2} t dt$

3) $x^4 + 1 = t^4; \quad x^3 dx = t^3 dt$

4) $x^4 = t^2; \quad x^3dx = \frac{1}{2}tdt$

5) $x^2 = t; \quad xdx = \frac{1}{2}dt$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \cos 4x \cdot dx$

1) $\sin 4x + C$

2) $-\sin 4x + C$

3) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$

4) $4\sin 4x + C$

5) $-4\sin 4x + C$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ МЕТОД ВЗЯТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

1) Метод интегрирования по частям: $\ln x = u; \quad x \cdot dx = dv$

2) Метод интегрирования по частям: $\ln x = u; \quad \frac{dx}{x} = dv$

3) Метод интегрирования по частям: $\frac{1}{\ln x} = u; \quad \frac{dx}{x} = dv$

4) Метод интегрирования по частям: $\frac{1}{x} = u; \quad \frac{dx}{\ln x} = dv$

5) Метод интегрирования подстановкой: $\ln x = u; \quad \frac{dx}{x} = du$

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. СОГЛАСНО ПЕРВОЙ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕКОМЕНДАЦИИ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ ЗА *U* ПРИНИМАЕТСЯ ФУНКЦИЯ

1) *lnx*

2) *arcsinx*

3) e^x

4) *arccosx*

5) *arctgx*

Ответы:1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 5; 5) 3

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление определенного интеграла».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \sin 5x dx$
2. $\int 4^{2x-1} dx$
3. $\int \frac{dx}{(1+2x)^2}$
4. $\int \frac{7dx}{(4x-3)^4}$
5. $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$
6. $\int \frac{xdx}{x^2+28}$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Основные понятия

Восстановление функции по известной производной этой функции основная задача интегрального исчисления (т.е. найти функцию *F(x),* зная ее производную или дифференциал).

Первообразной функцией для данной функции f(x) на интервале называется такая функция F(x), производная которой равна f(x) или дифференциал которой равен f(x)dx на рассматриваемом интервале.

Теорема. Если функция F(x) является первообразной для функции f(x) на некотором интервале, то множество всех первообразных для f(x) задается формулой F(x)+C, где C – постоянное число:

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных функций F(x)+C для f(x) или f(x)dx называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом можно записать $\int f(x)dx = F(x)+C$, *если F'(x)=f(x).*

Свойства неопределенного интеграла

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.* $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.* $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
3. *Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C, т. е.* $\int dF(x) = F(x)+C$.
4. *Постоянный множитель не равный нулю можно вынести за знак неопределенного интеграла, т. е.* $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ \ k \neq 0$.
5. *Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых, т. е.*
$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int \left(f_2(x)\right)dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$, при $x \neq 0$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int sin\, x dx = -cos\, x + C$;
7. $\int cos\, x dx = sin\, x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$;

9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$;

10. $\int 0dx = C$.

Метод замены переменной (подстановки)

Этот способ заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой переменной для упрощения подынтегрального выражения и приведения его к табличному виду. В интеграле $\int f(x)dx$ *сделаем подстановку* $x = \varphi(t)$, *где функция* $\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную. Тогда:* $f(x) = f(\varphi(t))$; $dx = \varphi'(t)dt$; *на основании независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента:* $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *– формула замены переменных в неопределенном интеграле. Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде* $t = \varphi(x)$, *тогда* $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$, *где* $t = \varphi(x)$.

Занятие №9

Тема: Вычисление определенного интеграла

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: освоить методы вычисления определенного интеграла, решения прикладных задач.

Студент должен иметь практический опыт: владения простейшими методами интегрирования.

Студент должен знать: понятие определенного интеграла, свойства определенного интеграл, формулу Ньютона-Лейбница, определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Студент должен уметь: вычислять определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница; применять методы интегрирования для вычисления определенного интеграла, решения прикладных задач.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Хронокарта занятия

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные	Таблицы, методические разработки для	Аудитория кафедры физики и	30

	инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	студентов	математики	
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Определенный интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.

*2) **Проверка внеаудиторной самостоятельной работы** планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1.Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 2x^3 dx;$$

Решение: Найдем первообразную для функции $f(x)=2x^3$: $F(x)=2\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{2}+C$. Для того, чтобы воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница возьмем первообразную для которой $C=0$. Тогда

$$\int_0^1 2x^3dx = \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1 = \frac{1^4}{2} - \frac{0^4}{2} = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 2. Вычислить интеграл

$$\int_1^2 x^2\left(3 - x^3\right)^4 dx,$$

Решение: Применим метод подстановки. Пусть $t = 3 - x^3$. Тогда $dt = d\left(3 - x^3\right) = \left(3 - x^3\right)' dx = -3x^2dx$ и $x^2dx = -\frac{dt}{3}$. Найдем новые пределы интегрирования: $t_B = 3 - 2^3 = -5$, $t_H = 3 - 1^3 = 2$. Следовательно,

$$\int_1^2 x^2\left(3 - x^3\right)^4 dx = \int_2^{-5} t^4\left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3}\int_2^{-5} t^4dt = -\frac{1}{3}\cdot\left.\frac{t^5}{5}\right|_2^{-5} = -\frac{1}{15}\left((-5)^5 - 2^5\right) =$$

$$= -\frac{1}{15}\cdot(-3125 - 32) = \frac{3157}{15}.$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^1 2x^3dx$.
2. $\int_1^2 2^{x-4}dx$.
3. $\int_1^2 x^2\left(3 - x^3\right)^4 dx$.
4. $.\int_1^e \frac{ln^2 x}{x}dx$.
5. $\int_0^8\left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$.

6. $\int\limits_{0}^{\pi} sin\, xdx$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ, КАКОЕ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ СВОЙСТВ ОТНОСИТСЯ КАК К ОПРЕДЕЛЕННОМУ, ТАК И К НЕОПРЕДЕЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ

1) Если на интервале *[a, b] f(x)>0,* то и $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx > 0$.

2) Если на интервале *[a, b] f(x)>φ(x)*, то и $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx > \int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$.

3) Если на интервале *[a, b] f(x)* непрерывна, то $\int\limits_{a}^{b} [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \pm \int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$.

4) Если на интервале *[a, b] f(x)* непрерывна, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx \pm \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$.

5) Если на интервале *[a, b] f(x)* непрерывна, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$.

2. УКАЖИТЕ, КАКАЯ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ФОРМУЛ ЯВЛЯЕТСЯ ФОРМУЛОЙ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

2) $m(b-a) \le \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le M(b-a)$

3) $\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)$, где $c \in [a,b]$

4) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$

5) $V = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)dx$

3. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА ПОЗВОЛЯЕТ

1) вычислить предел интегральной суммы на заданном интервале
2) вычислить неопределенный интеграл на заданном интервале
3) установить связь между определенным интегралом как пределом интегральной суммы и неопределенным интегралом как результатом операции, обратной дифференцированию
4) вычислить площадь криволинейной трапеции, если функция на заданном интервале положительна
5) вычислить приращение функции на заданном интервале

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^3}$

1) $\frac{1}{16}$
2) $-\frac{1}{16}$
3) $\frac{1}{8}$
4) $-\frac{1}{8}$
5) $\frac{7}{256}$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНУЮ ФОРМУЛУ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = uv - \int vdu$
2) $\int\limits_a^b f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$
3) $\int\limits_a^b f(x)dx = uv - \int\limits_a^b vdu$
4) $\int\limits_a^b f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int vdu$
5) $\int f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

Ответы:1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 1; 5) 2

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление площадей с помощью интегралов».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^3 2x dx$
2. $\int_0^2 (x^2 + e^x) dx$
3. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$
4. $\int_2^5 \sqrt{x-1} dx$
5. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Определенный интеграл как предел интегральной суммы

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a<b$. Выполним следующие действия: разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a=x_0, x_1 \ldots, x_n=b$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,... $[x_{n-1}, x_n]$; в каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку c_i и вычислим $f(c_i)$; умножим $f(c_i)$ на длину соответствующего частичного отрезка $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$: $f(c_i)\Delta x_i$ и составим сумму всех таких произведений. Сумма всех таких произведений $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$ называется интегральной суммой функции

$y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Найдем предел интегральной суммы, когда $n\to\infty$ или $max\Delta x_i\to 0$.

Если при этом интегральная сумма имеет предел I, который не зависит от способа разбиения отрезка на частичные отрезки, ни от выбора в них, то число I называют определенным интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – подынтегральной функцией, отрезок $[a, b]$ – областью (отрезком) интегрирования.

Функция $y= f(x)$, для которой на отрезке $[a, b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла

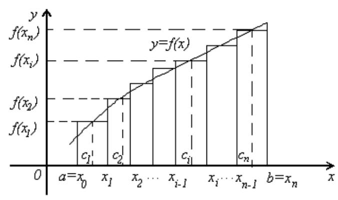
1. *Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz...$
2. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:* $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.
4. *Если c – постоянное число и функция f(x) интегрируема на отрезке [a, b], то* $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е. постоянный множитель с можно вынести за знак определенного интеграла.
5. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на [a, b], тогда* $\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)+\int\limits_a^b f_2(x)dx$, т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.
6. *Свойство аддитивности. Если f(x) интегрируема на отрезке [a, b] и*

a<c<b, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция y=f(x)≥0. Фигура ограниченная сверху графиком функции, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми x=a, x=b, называется криволинейной трапецией.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, которая определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a=x_0, x_1 \ldots, x_n=b$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ на n частичных отрезков, в каждом из которых возьмем произвольную точку c_i. Умножим $f(c_i)$ на длину соответствующего частичного отрезка Δx_i. Сумма всех таких произведений $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади криволинейной трапеции $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \approx S_n$. За точное значение площади криволинейной трапеции принимают предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n стремится к ∞:



$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – какая-либо ее первообразная на [a,b] (F'(x)=f(x)), то имеет место формула: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Данное равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

Метод замены переменных в определенном интеграле

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x=\varphi(t)$. Если функция $x=\varphi(t)$ и ее производная $x'=\varphi'(t)$ непрерывны; $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. При вычислении определенного интеграла методом замены переменных возвращаться к исходной переменной не требуется, так как определенный интеграл есть некоторое постоянное число. Достаточно лишь найти пределы интегрирования α и β по новой переменной t как решение относительно переменной t уравнений $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то имеет место формула: $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$. Эта формула называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

Занятие №10

Тема: Вычисление площадей с помощью интегралов
Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: освоить методы вычисления определенного интеграла, решения прикладных задач.
Студент должен иметь практический опыт: владения простейшими методами интегрирования.

Студент должен знать: понятие определенного интеграла, свойства определенного интеграл, формулу Ньютона-Лейбница, определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Студент должен уметь: вычислять определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница; применять методы интегрирования для вычисления определенного интеграла, решения прикладных задач.

Воспитательные:

− способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;
− способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
− способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

− создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
− создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
− создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
− содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов,	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5

	значений коэффициентов Стьюдента)			
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль	программа компьютерного тестирования	Тестовые задания по данной теме,	Аудитория кафедры физики и	10

усвоения.	Veral Test	ситуационные задачи.	математики	
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Задача о криволинейной трапеции.
2. Вычисление площади криволинейной трапеции.
3. Применение интеграла к решению практических задач.

*2**) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы** планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

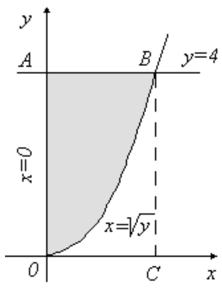
3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{y}, \quad x=0, \quad y=4$.

Решение: Сделаем чертеж. Из чертежа (рис. 6.2) видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей: $\boldsymbol{S = S_{OABC} - S_{OBC}}$, каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла.



Решим систему $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$. Получаем, что точка B пересечения прямой $\boldsymbol{y = 4}$ и кривой $\boldsymbol{x = \sqrt{y}}$ имеет координаты (2; 4). Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4dx = 4\int_0^2 dx = 4x\Big|_0^2 = 8,$$

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Окончательно $S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}(кв.\ ед.)$

Отметим, что данная задача может быть также решена другим способом. В данном случае площадь вычисляется посредством проецирования криволинейной трапеции на ось ординат. Пределы интегрирования найдены как ординаты точек пересечения данных линий. Тогда

$$S = \int_0^4 \sqrt{y}dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{16}{3}(кв.\ ед.).$$

П р и м е р 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на *0,05 м*, если сила *100 Н* растягивает пружину на *0,01 м*?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ *Н* растягивает пружину на $x = 0{,}01$ *м*; следовательно, $100 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа равна $A = \int_0^{0,05} 10000xdx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12{,}5\ (Дж)$.

П р и м е р 3. Пусть скорость выражена формулой *v(t)=10t+2* (*м/с*). Найти путь, пройденный телом от начала движения (*t=0*) до конца 4-й секунды.

Решение: Путь, пройденный телом равен:

$$S = \int_0^4 (10t + 2)dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88(м).$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Вычислить площади фигур ограниченных линиями:

1. *y= cos x и осью Ox, в пределах от 0 до* $\frac{\pi}{2}$.
2. $y=x^2$, $y=|x|$.
3. Вычислить работу, произведенную при сжатии пружины на 0,03 м, если известно, что для укорочения ее на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н .
4. Скорость движения тела $v=3t^2-2t$ (*м/с*). Какой путь пройдет тело за 5 с от начала движения?

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНО ЗАПИСАННУЮ ФОРМУЛУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1) $S = \int_a^b f(x)dx$

2) $S = \int_c^d \varphi(y)dy$

3) $S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$

4) $S = \int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx$

5) $S = \int_a^c [f(x) - \varphi(x)]dx + \int_c^b [\varphi(x) - f(x)]dx$

2. УКАЖИТЕ ФОРМУЛУ, ПО КОТОРОЙ НЕЛЬЗЯ ВЫЧИСЛИТЬ ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ

1) $S = \int_a^b f(x)dx$
2) $S = \int_c^d \varphi(y)dy$
3) $S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$
4) $S = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$
5) $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВЫМИ $У=2^X$ И $У=2^{-X}$ НА ИНТЕРВАЛЕ [-1; 1]

1) ln2
2) -ln2
3) 0
4) 7ln2
5) -7ln2

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЙ $r=sin\varphi$ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1) π
2) π^2
3) $\frac{\pi}{2}$
4) 2π
5) $\frac{\pi^2}{2}$

5. УКАЖИТЕ, ПО КАКОЙ ИЗ ФОРМУЛ НЕЛЬЗЯ ВЫЧИСЛИТЬ ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

1) $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$, вокруг оси абсцисс
2) $V = \pi\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$, в полярной системе координат

3) $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi^{2}(t)\varphi'(t)dt$, вокруг оси абсцисс

4) $V=\pi\int_{c}^{d}\varphi^{2}(y)dy$, вокруг оси ординат

5) $V=\pi\int_{\gamma}^{\delta}\varphi^{2}(t)\psi'(t)dt$, вокруг оси ординат

Ответы:1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 3; 5) 2

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к контрольной работе по теме «Дифференциальное и интегральное исчисление».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

1. $y=6x-x^{2}$ *и осью OX*

2. $y=\frac{1}{2}x^{2}+2, y=0, x=1, x=3$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке *[a, b]* задана непрерывная функция *y=f(x)≥0. Фигура ограниченная сверху графиком функции, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми x=a, x=b, называется криволинейной трапецией.*

Площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс *(f(x)≥0),* равна соответствующему определенному интегралу (геометрический смысл определенного интеграла): $S=\int_{a}^{b}f(x)dx$. Если криволинейная трапеция расположена ниже оси *Ox* (*f(x)<0*), то ее площадь может быть найдена по формуле: $S = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы *F=F(x),* направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки *M* из положения *x=a* в положение *x=b,* находится по формуле: $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

Путь пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью *v=v(t).* Путь *S*, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt\ .$$

Занятие №11

Тема: Контрольная работа по теме «Дифференциальное и интегральное исчисление»

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: определение качества знаний.

Студент должен иметь практический опыт: решения типовых задач.

Студент должен знать: основные определения и формулировки теорем, методику решения задач.

Студент должен уметь: решать примеры и задачи пройденных разделов.

Воспитательные:

- способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга*;*
- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

− способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

− создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

− создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

− создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

− содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:**

Контрольные вопросы:

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Задание №1. Найти пределы функций:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2-3}{3x^2+x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x^2+8x+7}$, в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-2x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{3x^2+x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-x^3+2}{6x^4-2x^2+3}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$, в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{3x^2-11x-4}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-4x^3}{1+x^2+8x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4+x}{\sqrt{1-6x}-5}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x-x^2}{4x^2+3x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x+5x^3}{2+x^2-x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+1}-1}$, в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+13x+3}{x^2+x-6}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+4x-3}{5x^2+3x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$, в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-4x+2}{3-2x+5x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{7x^2+x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{3x-3}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-7x^2}{3x^2-4x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{4-x^2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Задание №2. Найти производные следующих функций:

1. $а) y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$; $б) y=\left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)$; $в) x=a\cdot\cos t,\quad y=b\cdot\sin t$

2. $а) y=2^{\sqrt{x}};\quad б) y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x};\quad в) x=\ln(1+t^2),\quad y=t^2$

3. $а) y=x^3\cdot e^{3x};\quad б) y=\sqrt[3]{1+\ln^2 x};\quad в) x=1-\cos 2t,\quad y=2+\sin 2t$

4. $а) y=\sqrt{1+e^x};\quad б) y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x};\quad в) x=\dfrac{1}{2}t^2,\quad y=\dfrac{1}{2}t^3+t$

5. $а) y=e^{2x}\cdot\sin x;\quad б) y=\operatorname{arctg}^3 x;\quad в) x=\dfrac{1}{t},\quad y=\dfrac{t-1}{t}$

6. $а) y=(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x};\quad б) y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\quad в) x=\ln(\cos t),\quad y=\sin^2 t$

7. $а) y=e^x\cos 3x;\quad б) y=\ln^2(x^3+1);\quad в) x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+1,\quad y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t}$

8. $а) y=x^2\ln(x^2+1);\quad б) y=\sqrt[4]{\operatorname{tg} 2x};\quad в) x=e^{t^2},\quad y=t\cdot e^{t^2}$

9. $а) y=(x+1)\cdot\sqrt{x^2+1};\quad б) y=e^{\sin^2 x};\quad в) x=\ln t,\quad y=t+\dfrac{1}{t}$

10. $а) y=\cos 2x-\dfrac{1}{3}\cos^3 2x;\ б) y=(x^2+4)\cdot e^{-x^2};\ в) x=\dfrac{1}{2}t^2+t,\quad y=\dfrac{1}{3}t^3-t$

Задание №3. Найти интегралы:

1. $а)\int x(x+1)(x+2)dx;\quad б)\int\dfrac{xdx}{x^2-5};\quad в) x\cos 3xdx;\quad г)\int\dfrac{dx}{2x^2-5x+7}.$

2. $а)\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx;\quad б)\int\dfrac{3x^2dx}{1+x^6};\quad в)\int x\cdot 2^{-x}dx;\quad г)\int\dfrac{dx}{x^2+2x+5}.$

3. $а)\int\dfrac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx;\quad б)\int\dfrac{dx}{\sqrt{5x-2}};\quad в)\int x^3\ln xdx;\quad г)\int\dfrac{xdx}{1+2x}.$

4. $а)\int(1-\sqrt[3]{x^2})^3dx;\quad б)\int\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx;\quad в)\int x^2\ln xdx;\quad г)\int\dfrac{1-3x}{3+2x}dx.$

5. $а)\int\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2dx;\quad б)\int x7^{x^2}dx;\quad в)\int\arccos 2xdx;\quad г)\int\dfrac{xdx}{2+x}.$

6. $a)\int \frac{x^2-2}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ $б)\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1};$ $в)\int \operatorname{arctg} 2x dx;$ $г)\int \frac{dx}{x^2+2x}.$

7. $a)\int (1+2x^3)^2 dx;$ $б)\int \frac{xdx}{2x^2+3};$ $в)\int \frac{xdx}{e^x};$ $г)\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}.$

8. $a)\int \frac{(1+x)^2}{x\sqrt{x}}dx;$ $б)\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}};$ $в)\int xe^{-2x}dx;$ $г)\int \frac{x-1}{2x+1}dx.$

9. $a)\int \frac{(x-x^2)^2}{\sqrt{x}}dx;$ $б)\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$ $в)\int x\sin x\cos x dx;$ $г)\int \frac{dx}{3x^2-x+1}.$

10. $a)\int 2^x e^x dx;$ $б)\int \frac{\operatorname{arctg}(x/2)}{4+x^2}dx;$ $в)\int x\sin 3x dx;$ $г)\int \frac{2x+3}{2x+1}dx.$

4. Итоговый контроль:

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вероятность случайного события».

Занятие №12

Тема: Вероятность случайного события

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

<u>Цели:</u>

Учебные: закрепить понятия теории вероятностей и методы решения задач на классическое и статистическое определение вероятности.
Студент должен иметь практический опыт: нахождения вероятностей событий.

Студент должен знать: понятия случайного события, классификацию случайных событий, определение полной группы событий; классическое и статистическое определения вероятности, свойства вероятности.

Студент должен уметь: решать задачи на вычисление вероятностей событий.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга*;*
– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.
Развивающие:
– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные		Журнал учета посещений	Аудитория кафедры	5

мероприятия.		занятий.	физики и математики	
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10

	инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)			
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Случайные события и их классификация.
2. Классическое определение вероятности.
3. Свойства вероятности.
4. Теоремы сложения для несовместных событий.
5. Следствий из теоремы сложения.
6. Теоремы умножения.
7. Условная вероятность.

8. Вероятность появления хотя бы одного события.

***2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы** планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

***а) подготовка студентов к самостоятельной работе** (проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. В ящике 8 пронумерованных шаров с номерами № 1, № 2, ..., № 8. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 8?

Решение. Пусть событие А - вынули шар с номером не больше 8. Данное событие достоверное, следовательно, вероятность Р(А)=1.

Пример 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка,..., шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Таким образом, общее число возможных элементарных исходов испытания равно 6·6=36.

Эти исходы единственно возможны, и, в силу симметрии костей, равновозможные.

Благоприятствующими интересующему нас событию являются следующие пять исходов:

1) 6, 2; 6+2=8, 4) 2, 6; 2+6=8,
2) 6, 4; 6+4=10, 5) 4, 6; 4+6= 10.
3) 6, 6; 6+6=12,

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов: $P(A)=\frac{5}{36}$.

Пример 3. По цели произвели 25 выстрелов, зарегистрировали 23 попадания. Найти относительную частоту попадания в цель.

Решение. Число проведенных экспериментов (выстрелы по мишени) $n = 25$, частота попадания в цель $m = 23$. Относительная частота: $P^*(A) = \frac{23}{25} = 0{,}92$.

П р и м е р 4. Монета брошена пять раз. Орел выпал два раза. Каковы вероятность и относительная частота выпадения орла?

Решение. Вероятность впадения орла есть 0,5 (из двух возможных исходов при подбрасывании монеты выпадению орла благоприятствует один), а относительная частота выпадения орла есть $\frac{2}{5} = 0{,}4$ (событие наступило два раза в пяти испытаниях).

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами № 1, № 2, ..., № 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

2. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

3. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар

4. В урне 20 шаров с номерами № 1, № 2, № 3, ... № 20. Какова вероятность вынуть шар с № 37?

5. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета – выигрыш по 60 руб., на десять билетов – выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов – выигрыш по 10 руб., на 165 билетов – выигрыш по 5 руб., на 400 билетов – выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не меньше 10 руб.?

6. Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадает орел?

7. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

8. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей? Чему равна относительная частота появления

нестандартной детали?

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ ИЗ N ПО К ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
2) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
3) $P_n = n!$
4) $k^n = \sum_{r=1}^{k} C_k^r = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$
5) $\Phi(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_k>0}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СОБЫТИЯ A_1, A_2, …, A_N НАЗЫВАЮТСЯ ПОЛНОЙ ГРУППОЙ СОБЫТИЙ, ЕСЛИ ОНИ ЯВЛЯЮТСЯ

1) Единственно возможными, несовместными и равновероятными
2) Единственно возможными и несовместными
3) Единственно возможными
4) Несовместными
5) Равновероятными

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СУММОЙ ДВУХ СОБЫТИЙ А И В НАЗЫВАЕТСЯ НОВОЕ СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ В ТОМ, ЧТО

1) Произойдет или событие А или событие В или оба события вместе
2) Произойдет или событие А или событие В, но не оба вместе
3) Произойдет событие А и не произойдет событие В
4) Произойдет событие В и не произойдет событие А
5) Произойдет и событие А и событие В

4. УКАЖИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ БРОСАНИИ ДВУХ ИГРАЛЬНЫХ КОСТЕЙ СУММА ОЧКОВ, ВЫПАВШИХ НА ИХ ГРАНЯХ БУДЕТ РАВНА 11

1) 1/3
2) 1/6
3) 11/36
4) 1/36
5) 1/18

5. УКАЖИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ ВО ВПИСАННЫЙ В КВАДРАТ КРУГ, ЕСЛИ СТОРОНА КВАДРАТА РАВНА 4 $ДМ^2$ И ПОПАДАНИЕ В НЕГО ЕСТЬ ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ

1) π/16
2) π/12
3) π/8
4) π/4
5) π/2

Ответы:1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 5; 5) 4

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Теоремы сложения и умножения, вероятность появления хотя бы одного события».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну последнюю цифру. Найти вероятность того, что абонент набрал правильный номер.

2. По данным автопредприятия на 1000 рейсов автобусов в 50 случаются поломки. Найти вероятность поломки одного автобуса.

3. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

4. В лотерее разыгрываются 100 билетов с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного билета не содержит цифры два.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Понятие испытания, события, виды событий

Под испытанием принято понимать набор некоторых условий, который можно повторить многократно. Каждое испытание может привести или не привести к некоторому результату, исходу. Результат, исход испытания называют событием. События обозначают первыми заглавными буквами латинского алфавита: *A*, *B*, *C* и т. д. Наблюдаемые события можно подразделить на три вида: *случайные, достоверные и невозможные.*

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет в результате испытания. Случайным называется событие, появления которое невозможно прогнозировать. Случайные события подразделяют на совместные, несовместные и равновозможные.

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании. Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появление другого событий в одном и том же испытании. События называются равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. В частности, если события A_1, A_2, … $A_к$, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий. Этот частный случай полной группы будет использоваться в дальнейшем.

События A_1, A_2, … $A_к$, образующие полную группу попарно несовместных равновозможных событий называется элементарными событиями или элементарными исходами.

Элементарные события такой группы A_1, A_2, … $A_к$ называются благоприятствующими осуществлению события А, если осуществление любого из элементарных событий влечет за собой осуществление события А.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Вероятность события А определяется формулой $P(A)=\frac{m}{n}$.

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события – положительное число, заключенное между нулем и единицей: $0 < P(A) < 1$.

Относительная частота события

Пусть проведено n испытаний в одних и тех же условиях. Частотой события называется количество появлений события A в n испытаниях. Обозначают частоту события буквой m. *Отношение частоты события к общему количеству всех проведенных испытаний называется относительной частотой события.*

Относительная частота события А определяется формулой $P^*(A)=\frac{m}{n}$.

В классическом определении вероятностей не требуется, чтобы испытания проводились в действительности; в определении относительной частоты предполагается, что испытания были проведены.

Если испытания проводились в одинаковых условиях, и число испытаний было достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости: В различных опытах относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число есть вероятность появления события.

Статистической вероятностью события А в испытании называется число Р(А), около которого группируются значения относительной частоты при большом количестве испытаний n.

Занятие №13

Тема: Теоремы сложения и умножения, вероятность появления хотя бы одного события

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: закрепить методику решения задач на определение вероятности события с помощью теорем сложения, умножения.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения вероятностей событий.

Студент должен знать: формулировки теоремы сложения для несовместных событий; следствий из теоремы сложения; теоремы умножения; формулы полной вероятности; формулу Бернулли и Пуассона.

Студент должен уметь: решать задачи на вычисление вероятности событий, вычислять характеристики распределения дискретной случайной величины.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4.	доска;	Работа с	Аудитория	25

Самостоятельная работа студентов.	мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	конспектом	кафедры физики и математики	
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Теоремы сложения для несовместных событий.
2. Следствий из теоремы сложения.
3. Теоремы умножения.
4. Условная вероятность.
1. Вероятность появления хотя бы одного события.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

1. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый? черный? синий? красный? белый или черный? синий или красный? белый, черный или синий?

Решение. Имеем

$n=10+15+20+25=70$, тогда

$P(Б) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$, $P(Ч) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$, $P(С)=\frac{20}{70} = \frac{2}{7}$, $P(К)=\frac{25}{70} = \frac{5}{14}$

Применяем теорему сложения вероятностей:

$P(Б+Ч)=P(Б)+P(Ч)=5/14$; $P(С+К)=P(С)+P(К)=9/14$; $P(Б+Ч+С)=1–P(К)=9/14$.

2. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что, оба шара белые?

Решение. В данном случае речь идет о совмещении событий A и B, где событие A – появление белого шара из первого ящика, событие B – появление белого шара из второго ящика. При этом A и B – независимые события.

Имеем: $P(A)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$, $P(B)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$. Применяем теорему умножения вероятностей для независимых событий: $P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$.

3. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой черный.

Решение.

Событие A – появление белого шара из первого ящика,

» B – » » » » второго »,

» C – » черного » » первого » ($C=\bar{A}$),

» D – » » » » второго » ($D=\bar{B}$).

$P(A)=1/6$, $P(B)=2/3$, $P(C)=P(\bar{A})=1-1/6$,

$P(D)=P(\bar{B})=1-2/3=1/3$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – черный $P(AD)=P(A)\cdot P(D)=1/6\cdot 1/3=1/18$.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика – белый: $P(BC)=P(B)\cdot P(C)=2/3\cdot 5/6=5/9$.

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично из первого или второго), будет белым, а шар, вынутый из другого ящика, – черным. Применяем теорему сложения вероятностей $P=P(AD)+P(BC)=11/18$.

4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором два вопроса.

Решение. Пусть событие A – студент знает ответ на первый вопрос, тогда событие B – студент знает ответ на второй вопрос. События A и B зависимые.

Найдем вероятность события A: $P(A)=\dfrac{20}{25}$. Найдем условную вероятность события B, в предположении, что событие A уже осуществилось: $P(B)=\dfrac{19}{24}$. Вероятность совмещения этих двух событий найдем по теореме умножения для зависимых событий: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\dfrac{20}{25}\cdot\dfrac{19}{24}=\dfrac{19}{30}$.

5. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырёх или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша *p*= ½, следовательно, вероятность проигрыша *q* также равна ½. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применяется формула Бернулли.

Найдём вероятность того, что две партии из четырёх будут выиграны:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Найдём вероятность того что будут выиграны три партии из шести:

$$P_6 = (3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2) > P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырёх, чем три из шести.

6.Учебник издан тиражом 1000000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию n=1000000, p=0,001, k=5.События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

Найдём λ : $\boldsymbol{\lambda = np = 1000000\cdot 0{,}0001 = 10.}$

Искомая вероятность

$$\boldsymbol{P_{1000000}(5) = \frac{10^5\cdot e^{-10}}{5!} = \frac{10^5\cdot 0{,}000045}{120} = 0{,}0375.}$$

7. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно3; б) менее трёх; в) более трёх.

Решение. Число n=500 велико, вероятность p=0,002 мала и рассматриваемые события (повреждение изделий) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона $P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Найдём λ : $\lambda = np = 500\cdot 0{,}002 = 1$.

а) Найдём вероятность того, что будет повреждено ровно 3 (*k*=3) изделия:

$$P_{500}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{0{,}36788}{6}=0{,}0613.$$

б) Найдём вероятность того, что будет повреждено менее трёх изделий:

$$P_{500}(0)+P_{500}(1)+p_{500}(2)=e^{-1}+e^{-1}+\frac{e^{-1}}{2}=\frac{5}{2}e^{-1}=\frac{5}{2}\cdot 0{,}36788=0{,}9197.$$

в) Найдём вероятность P того, что будет повреждено более трёх изделий. События “повреждено более трёх изделий” и “повреждено не более трёх изделий” (обозначим вероятность этого события через Q)- противоположны, поэтому P+Q=1.

Отсюда $P=1-Q=1-\left[P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)\right].$

Используя результаты, полученные выше, имеем

$$P=1-\left[0{,}9197+0{,}0613\right]=0{,}019.$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. В коробке 10 упаковок аспирина, 5 упаковок анальгина, 2 упаковки цитрамона. Все упаковки одинаковы по форме и размеру. Наугад вынули одну упаковку таблеток. Какова вероятность того, что вынули цитрамон или аспирин?

2. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые. *Ответ*: 15/91.

3. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель. *Ответ*: 0,54

4. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того что “орёл” выпадет: а) менее двух раз б) не менее двух раз. *Ответ*. а) $P = P_5(0) + P_5(1) = 3/16$, б) $Q = 1 - \left[P_5(0) + P_5(1)\right] = 13/16$.

5.Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени Т равна 0,002. Найти вероятность того, что за время Т откажут ровно 3 элемента. (Указание: Принять $e^{-2} = 0{,}13534$.) *Ответ*. $P_{1000}(3) = 0{,}18$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ В РЕЗУЛЬТАТЕ НЕКОТОРОГО ИСПЫТАНИЯ МОГУТ ПРОИЗОЙТИ ДВА СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЯ: СОБЫТИЕ А С ВЕРОЯТНОСТЬЮ Р(А) И СОБЫТИЕ В С ВЕРОЯТНОСТЬЮ Р(В), ТО

1) Р(А или В) = Р(А) + Р(В)
2) Р(А или В) = Р(А) + Р(В) + Р(А)·Р(В)
3) Р(А или В) = Р(А) + Р(В) - Р(А)·Р(В)
4) Р(А или В) = Р(А) · Р(В)
5) Р(А или В) = Р(А) · Р(В) – Р(А) – Р(В)

2. УКАЖИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ХОТЯ БЫ ОДИН ИЗ ДВУХ СТРЕЛКОВ ПОПАДЕТ В ЦЕЛЬ, ЕСЛИ ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОМАХНУТЬСЯ У ПЕРВОГО СТРЕЛКА 1/5, А У ВТОРОГО СТРЕЛКА – 1/6

1) 1/3
2) 29/30
3) 2/3
4) 11/30
5) 1/15

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СОБЫТИЕ А НАЗЫВАЕТСЯ ЗАВИСИМЫМ ОТ СОБЫТИЯ В, ЕСЛИ

1) Наступление события В исключает возможность наступления события А
2) Наступление события В влечет за собой наступление события А
3) Событие А может произойти только при условии, что произошло событие В
4) Кроме событий А и В никакого другого события произойти не может
5) Вероятность наступления события А зависит от того, произошло или не произошло событие В

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ФОРМУЛОЙ БЕЙЕСА НАЗЫВАЕТСЯ ФОРМУЛА

1) $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$
2) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$
3) $P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(\overline{B}) \cdot P(A/\overline{B})$
4) $P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$
5) $P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$

5. УКАЖИТЕ, КАКАЯ ИЗ ФОРМУЛ НАЗЫВАЕТСЯ ФОРМУЛОЙ БЕРНУЛЛИ

1) $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

2) $P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

3) $P_n(m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

4) $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где $C_n^m \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$, $q = 1 - p$

5) $P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda = n \cdot p$

Ответы:1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) 5; 5) 4

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. Два студента независимо один от другого должны определить концентрацию сахара в биологической жидкости с помощью рефрактометра. На выполнение этого задания каждый из них получил по одному допуску. Вероятность провести исследование у первого студента равна 0,8, для второго - 0,4. Преподаватель зарегистрировал один приход. Найти вероятность того, что исследование провел первый студент.

Ответ: 6/7.

2. Студент Петров знает не все экзаменационные билеты. Что для него выгоднее: отвечать первым или вторым? Число билетов 30, из них Петров знает 25.

3. Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в 6 пробах данная колония микроорганизмов появится четыре раза.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Теорема сложения несовместных событий

Суммой двух событий A и B называется событие $C=A+B$, заключающееся в наступлении события A, или события B, или событий A и B одновременно. Если события A и B несовместны, то событие C заключается в осуществлении события A или события B.

Теорема: Вероятность наступления одного из двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 1. (теорема сложения для любого числа несовместных событий). Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Следствие 2. (сумма вероятностей для полной группы событий). Сумма вероятностей событий A_1, A_2, … A_n , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 3. (свойство противоположных событий). Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Теорема умножения. Условная вероятность

Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме указанных условий не налагается, то такую вероятность называется безусловной вероятностью; если же налагаются и другие, дополнительные условия, то условной вероятностью.

Условной вероятностью $\boldsymbol{P_A(B)}$ *называется вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило*.

Рассмотрим два события *A* и *B*. Пусть вероятность *P(A)* и $\boldsymbol{P_A(B)}$ известны.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $\boldsymbol{P(AB)=P(A)P_A(B)}$.

Теорема умножения для независимых событий

Событие B называется независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности.

Для независимых событий теорема умножения может быть записана следующим образом:

Теорема Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $\boldsymbol{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}$.

Для трех независимых событий (если события *A, B, C* независимы в совокупности, то независимы события *AB* и *C*, а также *A* и *B*) теорема умножения имеет вид: $\boldsymbol{P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)}$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться *n* событий независимых в совокупности, либо некоторые из них, причем вероятности появления каждого из событий известны. *Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2 , … A_n , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\boldsymbol{\overline{A}_1,\overline{A}_2,\ldots,\overline{A}_n}$*:*

$$\boldsymbol{P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n},$$

где $q_i = P(\overline{A}_i),\ i = 1, 2, ..., n$

Рассмотрим частный случай.

Если события A_1, A_2, ... A_n, *имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:* $P(A) = 1 - q^n$.

Формула полной вероятности

Вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, ... B_n, *образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытания не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

Если при проведении ряда испытаний выполняются следующие условия:

– число испытаний *n* конечно;

– каждое испытание имеет только два исхода: «событие *A* осуществилось» или «событие *A* не осуществилось»;

– все испытания независимые;

– вероятность появления события *A* в каждом испытании постоянна, то имеет место так называемая *схема Бернулли.* Примером повторных испытаний, описываемых схемой Бернулли, является многократное подбрасывание монеты.

Вероятность того, что при n независимых испытаниях событие А осуществится ровно k раз, если вероятность появления события А в каждом испытании постоянна и равна p можно найти по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, *где* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *– число сочетаний;*

$q = 1 - p$ *– вероятность непоявления события А в испытании.*

Функция n! (читается «эн факториал») определена для целых положительных чисел: $n! = \begin{cases} 1, & если \quad n = 0, \\ 1, & если \quad n = 1, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n, & если \quad n > 1. \end{cases}$

Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Закон Пуассона

Если вероятность *p* наступления события в отдельном испытании близка к нулю, то даже при большом числе испытаний *n*, но при небольшой величине произведения *np* получаемые по формуле Муавра-Лапласа значения вероятностей оказываются недостаточно точными.

В случае, когда n велико, а вероятность события мала (p≤0,1) пользуются асимптотической формулой Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad \text{, где } \mu = np.$$

Эту формулу называют законом Пуассона или законом редких событий.

При вычислениях по формуле Пуассона следует иметь в виду, что n должно быть не менее нескольких десятков, а лучше сотен, а значение параметра μ должно находится между *0* и *10*. При больших значениях μ рекомендуется производить вычисления по теореме Муавра-Лапласа.

Занятие №14

Тема: Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: закрепить понятие случайных величин, закона распределения дискретной случайной величины и характеристик распределения.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения числовых характеристик с.в.

Студент должен знать: определение случайной величины, дискретной и непрерывной случайной величины; определения характеристик распределения.

Студент должен уметь: решать задачи на вычисление характеристик распределения дискретной случайной величины.

Воспитательные:

− способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

− способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

− способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

− создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Хронокарта занятия

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30

	Стьюдента)			
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Дискретная случайная величина.
2. Закон распределения дискретной случайной величины.
3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Пусть в некоторой лотерее разыгрываются 10000 билетов. Один билет имеет выигрыш 10000 рублей, два билета – по 3000 рублей, 10 – по 500 рублей и 50 по 10 рублей. Установить закон распределения случайного выигрыша для владельца одного билета.

Решение. Определим возможные значения для случайной величины X:

$x_1=10000;$ $x_2=3000;$ $x_3=500;$ $x_4=100;$ $x_5=0.$

Найдем вероятности их появления: $p_1=0{,}0001;$ $p_2=0{,}0002;$

$$p_3=0{,}001; \quad p_4=0{,}005; \quad p_5=1-\sum_{i=1}^{n} p_i=1-0{,}0063=0{,}9937$$

Запишем закон распределения:

x_i	10000	3000	500	50	0

p_i	0,0001	0,0002	0,001	0,005	0,9937

Пример 2. В задаче по лотерею определить средний выигрыш для владельца одного билета.

Решение. Средний выигрыш подсчитывается как математическое ожидание и равен: $M(x) = \sum x_i p_i$

$$M(x) = 10000 \cdot 0{,}0001 + 3000 \cdot 0{,}0002 + 500 \cdot 0{,}001 + 50 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}9937 = 2{,}35$$

Пример 3. Закон распределения задан таблицей:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Для вычисления характеристик распределения удобно пользоваться таблицей:

	x_i	p_i	$x_i\, p_i$	M-x_i	$(M$-$x_i)^2$	$(M$-$x_i)^2 p_i$
	1	0,2	0,2	1,3	1,69	0,338
	2	0,4	0,8	0,3	0,09	0,036
	3	0,3	0,9	-0,7	0,49	0,147
	4	0,1	0,4	-1,7	2,89	0,289
Σ			2,3			0,81

Итак, математическое ожидание $M(x) = \sum x_i p_i = 2{,}35$;

дисперсия $D(x) = \sum (M - x_i)^2 p_i = 0{,}81$;

среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. События *A*, *B*, *C* и *D* образуют полную группу с одинаковыми вероятностями. Найти вероятности этих событий.

2. Дано распределение числа очков полученных стрелком при одном выстреле по мишени с шестью областями:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2

Найти: а) характеристики распределения;

б) вычислить вероятность того, что в результате одного выстрела стрелок попадет в область 3, или 4, или 5;

в) вычислить вероятность того, что в результате одного выстрела стрелок не промахнется.

3. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	1	3	6	8
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти характеристики распределения.

4. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрываются один выигрыш в 1000 руб., четыре по 500 руб., пять по 400 руб. и десять выигрышей по 100 руб. Установить закон распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ЕСЛИ ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ЗНАЧЕНИЕ X_I С ВЕРОЯТНОСТЬЮ P_I , ГДЕ I = 1, 2, …, N , ТО ЗАКОНОМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НАЗЫВАЕТСЯ

1) Статистическая зависимость p_i от x_i
2) Корреляционная зависимость p_i от x_i
3) Эмпирическая зависимость p_i от x_i
4) Функциональная зависимость x_i от p_i
5) Функциональная зависимость p_i от x_i

2. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ МОЖЕТ БЫТЬ ЗАДАН

1) Таблично
2) Интегральной функцией распределения
3) Дифференциальной функцией распределения
4) Эмпирической функцией распределения
5) Многоугольником распределения вероятностей (графически)

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ КАЖДОМУ ЗНАЧЕНИЮ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СООТВЕТСТВУЕТ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ПРИМЕТ ИМЕННО ЭТО ЗНАЧЕНИЕ, ВЫЧИСЛЕННАЯ ПО ФОРМУЛЕ БЕРНУЛЛИ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) Равномерным
2) Нормальным
3) Биномиальным
4) Показательным
5) Пуассона

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НАИВЕРОЯТНЕЙШЕГО ЧИСЛА НАСТУПЛЕНИЙ СОБЫТИЯ А В СЕРИИ ИЗ 10 ИСПЫТАНИЙ, ЕСЛИ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СОБЫТИЕ А НАСТУПИТ В КАЖДОМ ОТДЕЛЬНОМ ИСПЫТАНИИ РАВНА 0,7

1) 10
2) 7
3) 5
4) 3
5) 0

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СУММА ПРОИЗВЕДЕНИЙ КВАДРАТОВ ОТКЛОНЕНИЙ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТ ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НА СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ВЕРОЯТНОСТИ НАЗЫВАЕТСЯ

1) Математическим ожиданием
2) Дисперсией
3) Средним квадратическим отклонением
4) Начальным моментом второго порядка
5) Центральным моментом первого порядка

Ответы:1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 2

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Построение полигона и гистограммы статистических распределений, определение медианы и моды».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие А, вероятность которого равна Р. Рассматривается случайная величина X - число появления события А. Определить ее характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение (с.к.о.).

2. Медсестра обслуживает 4 больных. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания медсестры первый больной равна 0,9, второй-0,8, третий - 0,75, четвертый - 0,7. Определить математическое ожидание, диспепсию и с.к.о. числа больных, которые не потребуют внимания медсестры в течение часа.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Различают два типа случайных величин.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Закон распределения дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Так как случайная величина X в результате испытания всегда примет одно из возможных значений $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, то случайные события $X = x_i \ (i = 1,2,\ldots n)$ образуют полную группу событий, поэтому сумма из вероятностей равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Числовые характеристики случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$$M(x) = \mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математическое ожидание называют центром распределения. Это постоянная величина, которая показывает какое значение случайной величины следует ожидать в среднем при испытаниях или наблюдениях.

Вероятностный смысл математического ожидания – математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Дисперсия дискретной случайной величины

Математического ожидания недостаточно для описания дискретной случайной величины. Рассмотрим закон распределения отклонения. Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность этого события равна p_1, следовательно, вероятность события $x_1 - M(X)$ тоже равна p_1. Итак, закон распределения отклонения будет иметь вид:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	…	p_n

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания: $D(x) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Для вычисления дисперсии можно пользоваться формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i \text{ или } D(X) = \sum_{i=1}^{n} x^2 p_i - [M(X)]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служит среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью *X*.

Говорят, что в пределах нормы от математического ожидания отклоняются значения случайной величины, удовлетворяющие неравенству: $|x_i - M| \le \sigma$.

Занятие №15

Тема: Построение полигона и гистограммы статистических распределений, определение медианы и моды

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: закрепить основные понятия математической статистики; научиться строить полигоны и гистограммы; закрепить методику отыскания оценок характеристик генеральной совокупности по данным выборки.

Студент должен иметь практический опыт: построения полигонов и гистограмм.

Студент должен знать: понятия генеральной и выборочной совокупности; способы графического представления вариационных рядов; понятие точечных и интервальных оценок распределения; формулы оценок характеристик распределения.

Студент должен уметь: строить полигоны и гистограммы статистических распределений; вычислять точечные оценки характеристики распределения; находить интервальные оценки.

Воспитательные:

− способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

− способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

− способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов,	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30

	дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)			
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Генеральная и выборочная совокупности.
2. Статистический дискретный ряд распределения.
3. Статистический интервальный ряд распределения.
4. Полигон и гистограмма.
5. Показатели меры положения (среднее значение, медиана, мода).

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

1. Построить полигон относительных частот, если дискретный ряд распределения представлен в таблице:

x_i	37	38	39	40	41	42	43
m_i	1	5	5	8	15	4	12

Решение. Найдем объем выборки $n = \sum m_i = 50$. Так как относительная частота $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$, запишем в таблицу полученные значения:

x_i	37	38	39	40	41	42	43	
m_i	1	5	5	8	15	4	12	
p^*	0,02	0,1	0,1	0,16	0,3	0,08	0,24	$\Sigma=1$

Проконтролируем результат, вычислив сумму полученного ряда (по определению $\sum p_i^* = 1$). Построим полигон относительных частот.

2. Результаты наблюдений за числом частиц, попавших в счетчик Гейгера в течение минуты, приведены в виде интервального ряда распределения:

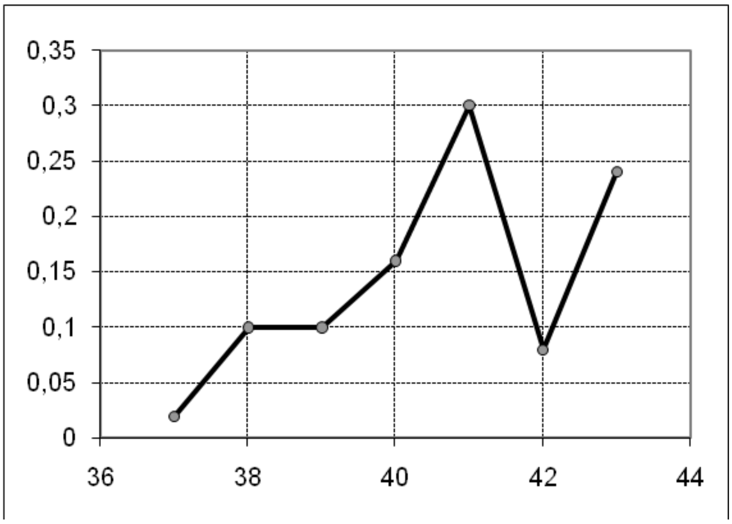
Интервал X	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44	44-48	48-52
m_i	1	4	20	10	8	4	2	1

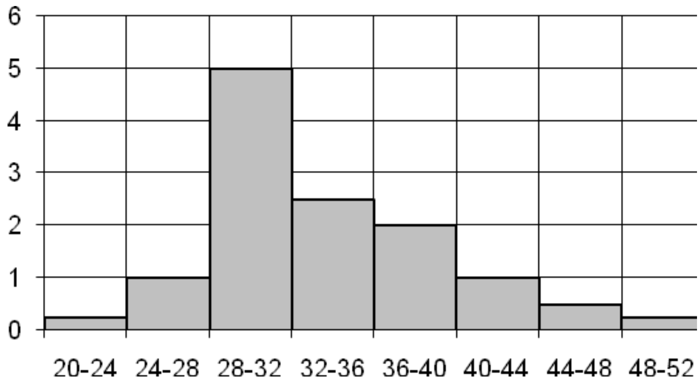
Построить гистограмму частот распределения.

Решение.

Так как гистограмма это фигура, составленная из прямоугольников с основаниями Δx – длина частичного интервала и высотами $\frac{m_i}{\Delta x}$, то запишем в таблице дополнительную строку $\frac{m_i}{\Delta x}$. Величина интервала $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 24 - 20 = 4$, тогда получим таблицу:

Интервал X	*20-24*	*24-28*	*28-32*	*32-36*	*36-40*	*40-44*	*44-48*	*48-52*
m_i	*1*	*4*	*20*	*10*	*8*	*4*	*2*	*1*
$\frac{m_i}{\Delta x}$	*0,25*	*1*	*5*	*2,5*	*2*	*1*	*0,5*	*0,25*





3. Найти оценку математического ожидания и несмещенную оценку дисперсии, если дана таблица распределения:

x_i	2	4	5	6
m_i	8	9	10	3

Решение. Для вычисления характеристик воспользуемся расчетной таблицей:

x	*m*	*xm*	$x_в$-x	$(x_в-x)^2$	$(x_в-x)^2m$

2	8	16	2	4	32
4	9	36	0	0	0
5	10	50	-1	1	10
6	3	18	-2	4	12
	30	120			54

Оценкой математического ожидания является выборочное среднее – среднее арифметическое значений статистического ряда: $\bar{x}_в = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i m_i$; итак,

$\bar{x}_в = \frac{120}{30} = 4$. Несмещенная оценка дисперсии генеральной совокупности:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(\bar{x}_в - x_i\right)^2 m_i;\ s^2 = \frac{54}{30-1} = 1{,}86$$

4. Получена выборка значений случайной величины (длина вируса): 0,33; 0,34; 0,32; 0,33; 0,31 (нм). Найти оценку математического ожидания и оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего.

Решение. Обратите внимание: другой вариант составления таблицы (без учета повторений)!

	x_i	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$
	0,31	0,016	0,000256
	0,32	0,006	0,000036
	0,33	-0,004	0,000016
	0,33	-0,004	0,000016
	0,34	-0,014	0,000196
Σ	1,63		0,00052

Найдем среднее арифметическое: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1{,}63}{5} = 0{,}326$.

Найдем оценку средней квадратической погрешности среднего арифметического: $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$; $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0{,}00052}{5 \cdot 4}} = 0{,}0051$ (нм).

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. Найти оценку генеральной средней, несмещенную оценку дисперсии и исправленное среднее квадратическое отклонение по выборке: 289; 203; 243; 210; 251; 224; 220; 211; 246. (Указание. Для расчета использовать формулы без учета частот).

2. Время цветения 100 одинаковых растений (в сутках) даны в таблице:

Фазы цветения	Число цветущих растений (m_i)
5-10	4
10-15	6
15-20	16
20-25	36
25-30	24
30-35	10
35-40	4

Построить гистограмму относительных частот распределения фазы цветения. Какой тип распределения напоминает гистограмма.

3. Дана выборка объема *n*. Найти объем выборки, оценки характеристик распределения, доверительный интервал с вероятностью 0,99, если статистические данные записаны в таблице:

x_i	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9
m_i	6	10	20	3	1

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	5	7	10
m_i	6	12	8	2

Найти оценки характеристик распределения. Построить полигон частот.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ВЫБОРОЧНОЙ СОВОКУПНОСТЬЮ НАЗЫВАЕТСЯ

1) Множество объектов, из которых производится отбор для исследования качественного или количественного признака
2) Множество объектов, отбираемых для исследования качественного или количественного признака
3) Количество объектов, из которых производится отбор для исследования качественного или количественного признака
4) Количество объектов, отбираемых для исследования качественного или количественного признака
5) Множество качественных или количественных признаков, подлежащих исследованию

2. УКАЖИТЕ СПОСОБ ОТБОРА, НЕ ТРЕБУЮЩИЙ РАСЧЛЕНЕНИЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ НА ЧАСТИ

1) Типический отбор
2) Серийный типический отбор
3) Простой случайный бесповторный отбор
4) Механический отбор
5) Серийный отбор

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ВАРИАЦИОННЫМ РЯДОМ НАЗЫВАЕТСЯ

1) Перечень частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака
2) Перечень относительных частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака

3) Перечень наблюдаемых значений признака
4) Перечень наблюдаемых значений признака, записанных в возрастающем порядке
5) Перечень частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака, записанных в возрастающем порядке

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СТАТИСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЫБОРКИ НАЗЫВАЕТСЯ

1) Перечень наблюдаемых значений признака
2) Перечень частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака
3) Перечень наблюдаемых значений признака и соответствующих им частот
4) Перечень наблюдаемых значений признака и соответствующих им относительных частот
5) Перечень наблюдаемых значений признака и соответствующих им частот или относительных частот

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЛОМАНАЯ ЛИНИЯ, ЗВЕНЬЯ КОТОРОЙ СОЕДИНЯЮТ ТОЧКИ С КООРДИНАТАМИ (X_1, N_1), (X_2, N_2), …, (X_K, N_K), НАЗЫВАЕТСЯ

1) Многоугольником распределения вероятностей
2) Полигоном частот
3) Полигоном относительных частот
4) Гистограммой частот
5) Гистограммой относительных частот

Ответы:1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 5; 5) 2

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Абсолютная и относительная погрешности прямых измерений».

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. Построить полигон частот и относительных частот по распределению выборки

x_i	*2*	*3*	*5*	*6*
m_i	*10*	*15*	*5*	*20*

2. Построить гистограмму относительных частот по распределению выборки

Интервал X	*10-15*	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*
m_i	*2*	*4*	*8*	*4*	*2*

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Генеральная и выборочная совокупности

Статистическая совокупность представляет собой множество объектов, однородных относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Совокупность, состоящая из всех объектов, которые могут быть к ней отнесены, называется *генеральной*. Число объектов генеральной совокупности называют ее объемом и обозначают N. Генеральная совокупность может содержать конечное и бесконечное число элементов.

Вследствие того, что в большинстве случаев невозможно сплошное исследование всех объектов совокупности, из генеральной совокупности выбирают для изучения часть объектов. Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется выборочной совокупностью или выборкой. Число выборки называется ее объемом и обозначается n. Чтобы свойства выборки хорошо отражали свойства генеральной совокупности, выборка должна быть *репрезентативной (представительной).*

В зависимости от техники отбора объектов из генеральной совокупности выборки делятся на повторные и бесповторные. Если выборку отбирают по одному объекту, который исследуют и возвращают обратно, то выборка называется *повторной*. Если объекты выборки не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной*. На практике обычно пользуются бесповторной выборкой.

Статистический дискретный ряд распределения

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n. Количественное значение изучаемого признака x_1 появилось m_1 раз, x_2 – m_2 раз,… x_k – m_k раз. Причем $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанную в возрастающем порядке, – *вариационным* рядом. Числа $m_1, m_2, .. m_k$ называют частотами (или весами), а их отношения к объему n выборки – относительными частотами:

$p_1^* = \frac{m_1}{n}; \ p_2^* = \frac{m_2}{n}; ...; p_i^* = \frac{m_i}{n}; ...; p_k^* = \frac{m_k}{n}$, причем

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Таблицу, содержащую значения вариант признака и их частоты или относительные частоты, называется статистическим дискретным рядом распределения или статистическим распределением выборки.

X	x_1	x_2	….	x_k
m	m_1	m_2	…	m_k
$p^*=m/n$	p_1^*	p_2^*		p_k^*

Статистический интервальный ряд распределения

В случае большого количества вариант и непрерывного распределения признака статистическое распределение можно задать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот или относительных частот. Интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на отдельное количество частичных интервалов $]x_0, x_1[$, $]x_1, x_2[$, ... Длиной Δx и находят для каждого интервала m_i

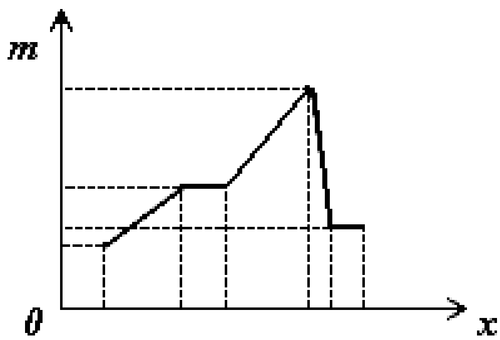
– сумму частот вариант, попавших в i-тый частичный интервал. Относительную частоту определяют как: $p_i^* = \frac{m_i}{n}$.

интервал X	$]x_0, x_1[$	$]x_1, x_2[$	….	$]x_{k-1}, x_k[$
сумма частот m	m_1	m_2	…	m_k
$p^*=m/n$	p_1^*	p_2^*		p_k^*

Таблицу, содержащую частичные интервалы и их частоты или относительные частоты, называется статистическим интервальным рядом распределения.

Полигон и гистограмма

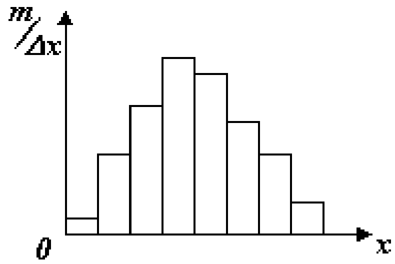
Для графического изображения статистического распределения используются *полигоны* и *гистограммы*. Для построения полигона на оси Ox откладывают значения вариант x_i, на оси Oy – значения m_i (или p_i^*). Построенную таким образом линию называют полигоном.



В случае непрерывного распределения признака вероятность каждого значения x_i равна нулю и описанный способ не годится.

Ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основанием Δx и высотой $m_i/\Delta x$ или $p_i^*/\Delta x$, называется гистограммой. Площадь частичного прямоугольника равна $m_i/\Delta x = m_i$. Площадь гистограммы равна сумме всех частот (или относительных частот), т. е. объему выборки (или единице).

На практике для рассматриваемых значений признака строят гистограмму, сравнивая ее с графиком плотности вероятности типичных распределений, можно отнести изучаемое распределение к тому или иному типу.



Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называется функцию *F*(x),* определяющей для каждого значения *x* относительную частоту события *X<x*: $F^*(x) = m(x)/n$, где число наблюдений, при которых значение признака *X* меньше *x; n* – объем выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения *F*(x)* выборки функцию распределения *F(x)* генеральной совокупности называется теоретической функцией.

Свойства эмпирической функции распределения

Свойство 1. Значения эмпирической функции распределения лежат в интервале: $0 \le F^*(x) \le 1$.

Свойство 2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

Свойство 3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x)=0$ при $x \le x_1$; если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x > x_k$.

Оценки характеристик распределения

Точечной называется оценка, которая определяется одним числом. Для того чтобы оценка давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям: быть несмещенной, эффективной и состоятельной.

Несмещенной называется точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки. Смещенной называется оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру. Эффективной называется статистическую оценку, которой (при заданном объеме выборки) имеет наименьшую дисперсию. Состоятельной называется оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Пусть проведено n измерений некоторой случайной величины X. В случае, когда выборка большая учитывают все повторения значений случайной величины в данной серии. Полученные измерения представлены в виде статистического ряда:

x_i	x_1	x_2	…	$x_к$
m_i	m_1	m_2	…	$m_к$

где x_i – значения случайной величины, m_i – частоты появления значений.

В случае, когда малая выборка повторения значений случайной величины в данной серии не учитывают, считают, что повторяющиеся значения, если таковые встречаются, вообще говоря, различны и статистический ряд имеет следующий вид:

x_i: x_1; x_2; … x_n.

Причем $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ (общему количеству поведенных испытаний).

Оценка математического ожидания

Оценкой математического ожидания является среднее арифметическое значений: $M(X) \approx \overline{X}$.

В случае, когда n велико оценка математического ожидания вычисляется по формуле:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i m_i ,$$

где x_i – значения случайной величины, m_i – частоты появления значений, n – общее количество проведенных испытаний, k– количество значений случайной величины. Если частоты m_i не учитывают, то используют формулу:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

где x_i – значения случайной величины, n – общее количество проведенных испытаний.

Оценку математического ожидания называют также *выборочной средней*.

Оценка дисперсии

Запишем формулу дисперсии дискретной случайной величины:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M(X))^2 p_i$$

Так как $M(X) \approx \bar{X}$, а $\frac{m_i}{n} \approx p_i$, то получим:

$$D(X) \approx \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \frac{m_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 m_i .$$

Полученная величина называется *дисперсией выборки и обозначается* D_B. Однако, эта оценка $D_B(X) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 m_i$ является <u>смещенной</u> оценкой для дисперсии.

Несмещенной оценкой дисперсии считают величину: $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$.

Несмещенную оценку дисперсии можно вычислять в зависимости от представления статистического ряда по формулам:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 m_i \text{ или } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

Оценка среднего квадратического отклонения

Несмещенная оценка среднего квадратического отклонения $s = \sqrt{s^2}$.

Оценка средней квадратической погрешности среднего арифметического

Оценка среднеквадратической погрешности среднего арифметического вычисляется по формуле: $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$.

При решении задач на вычисление оценок дисперсий расчеты удобно проводить в таблице.

Занятие №16

Тема: Абсолютная и относительная погрешности прямых измерений
Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешности прямых и косвенных измерений.
Студент должен иметь практический опыт: вычисления погрешностей.

Студент должен знать: понятие погрешности измерений; формулы абсолютной и относительной погрешности для прямых измерений, а также формулы вычисления абсолютной погрешности косвенно измеряемой величины.

Студент должен уметь: вычислять среднее арифметическое наблюдаемых значений; оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего; находить коэффициент Стьюдента по таблице; правильно записывать результаты измерений.

Воспитательные:

- способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;
- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
- способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

- создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
- создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
- создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
- содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Хронокарта занятия

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов,	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25

	значений коэффициентов Стьюдента)			
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие погрешности измерений.
2. Среднее арифметическое наблюдаемых значений.
3. Оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего.
4. Формула абсолютной погрешности для прямых измерений.
5. Формула относительной погрешности для прямых измерений.
6. Коэффициент Стьюдента.
7. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

***2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы** планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

***а) подготовка студентов к самостоятельной работе** (проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

1. Известно, что количественный признак *x* генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=20$ найдены выборочная средняя $\bar{x}_{â}=5{,}01$ и несмещенная оценка дисперсии $s^2=0{,}81$. Определить интервальную оценку математического ожидания с доверительной вероятностью $p=0{,}95$.

Решение. Доверительный интервал для математического ожидания, в который с вероятностью p попадает μ имеет вид: $\bar{x}_в - t_p(f)S_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x}_в + t_p(f)S_{\bar{x}}$.

Найдем оценку среднего квадратического отклонения выборочного среднего:

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}\ ;\ S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0{,}81}{20}} \approx 0{,}2\,.$$

По таблице найдем коэффициент Стьюдента $t_p(f)$.

По условию $p=0{,}95$, число степеней свободы $f=n-1=20-1=19$. Итак, $t_{0,95}(19)=2{,}093$.

Запишем:

$5{,}01-2{,}093\cdot 0{,}2 \le \mu \le 5{,}01+2{,}093\cdot 0{,}2$;

$4{,}59 \le \mu \le 5{,}43$.

2. При исследовании плодов здоровых крыс были получены показатели масса тела плода: 2,58; 1,95; 2,04; 2,46; 2,56; 2,04; 2,46; 2,58; 2,56; 2,58; 3,04; 2,46. Найти приближенное значение величины с вероятностью 0,95.

Решение.

Найдем среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i \; ; \; \bar{x} = \frac{1}{12}\cdot = 29{,}31 = 2{,}4425$$

Найдем абсолютную погрешность:

$\Delta\bar{x} = t_p(f)\cdot S_{\bar{x}}$; вычислим сначала $S_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i}{n(n-1)}}$;

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1{,}0089}{12\cdot 11}} = 0{,}0874.$$

Составим расчетную таблицу:

	x_i	m_i	$x_i m_i$	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$(\bar{x} - x_i)^2 m_i$
	1,95	1	1,95	-0,49	0,2401	0,2401
	2,04	2	4,08	-0,4	0,16	0,32
	2,46	3	7,38	0,02	0,0004	0,0012
	2,56	2	5,12	0,12	0,0144	0,0288
	2,58	3	7,74	0,14	0,0196	0,0588
	3,04	1	3,04	0,6	0,36	0,36
Σ		12	29,31			1,0089

Найдем коэффициент Стьюдента $t_{0,95}(11) = 2{,}20$. Тогда $\Delta\bar{x} = 2{,}20\cdot 0{,}087 = 0{,}192 \approx 0{,}20$.

Примечание. При записи результата применяют следующее правило округления: абсолютную погрешность округляют до двух значащих цифр по избытку. В приближенном значении округляют так, чтобы сохранились все надежные цифры и одна сомнительная. Сомнительная цифра находится в том же разряде, что округленная в абсолютной погрешности.

$x \approx 2{,}40 \pm 0{,}20$

Относительная погрешность: $E\% = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0{,}20}{2{,}4} \cdot 100\% = 8{,}3\%$.

Ответ: приближенное значение случайной величины $x \approx 2{,}40 \pm 0{,}20$.

3. При исследовании содержания общего белка в сыворотке крови у 5 крыс были получены следующие статистические данные: *6,1; 6,2; 6,7; 6,6; 6,3 (г%)*. Найти приближенное значение величины, абсолютную и относительную погрешности. Оценить качество измерений с вероятностью 0,95.

Решение.

	x_i	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$
	6,1	*-0,28*	*0,0784*
	6,2	*-0,18*	*0,0324*
	6,3	*-0,08*	*0,0064*
	6,6	*0,22*	*0,0484*
	6,7	*0,32*	*0,1024*
Σ			*0,268*

Найдем среднее арифметическое: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{31{,}9}{5} = 6{,}38$.

Найдем оценку средней квадратической погрешности среднего арифметического: $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$; $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0{,}268}{5 \cdot 4}} = 0{,}1158$ (г%).

Абсолютная погрешность: $\Delta \bar{x} = 0{,}1158 \cdot 2{,}78 = 0{,}321 \approx 0{,}33$.

Приближенное значение: $x \approx (6{,}40 \pm 0{,}33)$.

Относительная погрешность: $E\% = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0{,}33}{6{,}4} 100\% = 5{,}1\%$.

Ответ: приближенное значение случайной величины: $x \approx (0{,}330 \pm 0{,}015)$ нм; качество измерений неудовлетворительное.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. Определить концентрацию сахарозы в растворе, абсолютную и относительную погрешности с вероятностью 0,99. Результаты наблюдений: 2,4; 2,7; 2,5; 2,6; 2,3. Оценить качество измерений.

2. Проведены равноточные измерения электрического сопротивления катушки. Полученные результаты представлены в таблице:

x_i	6,27	6,271	6,272	6,273	6,274
m_i	1	2	4	1	2

Найти приближенное значение сопротивления, абсолютную и относительную погрешности с доверительной вероятностью 0,99.

3. При фотоэлектроколориметрическом определении концентрации ацетилсалициловой кислоты на основании реакции с сульфатом меди и пиридином были получены следующие результаты: 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,1%. Вычислить среднее значение полученных результатов и абсолютную и относительную погрешности при доверительно при вероятности 0,95.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ГИСТОГРАММОЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЧАСТОТ НАЗЫВАЕТСЯ СТУПЕНЧАТАЯ ФИГУРА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ОСНОВАНИЯМИ

КОТОРЫХ СЛУЖАТ ЧАСТИЧНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ДЛИНОЙ Н, А ВЫСОТЫ РАВНЫ

1) n_i
2) w_i
3) $\frac{n_i}{n}$
4) $\frac{w_i}{h}$
5) $\frac{n_i}{h}$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ Θ^* ЕСТЬ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Θ, ТО НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКОЙ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКАЯ ТОЧЕЧНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА, КОТОРАЯ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ РАВЕНСТВОМ

1) $M(\Theta) = \Theta^*$
2) $D(\Theta) = \Theta^*$
3) $M(\Theta^*) = \Theta$
4) $D(\Theta^*) = \Theta$
5) $\sigma(\Theta^*) = \Theta$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ ЗАДАНО СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ, ТО ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{n} x_i$
2) $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{n} x_i n_i$
3) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
4) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$
5) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i$

4. УКАЖИТЕ ФОРМУЛУ, ПО КОТОРОЙ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ

1) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i$
2) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right)^2$

3) $D_B = \dfrac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} n_i - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right)^2\right]$

4) $D_B = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} n_i - \dfrac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i n_i\right)^2$

5) $D_B = \dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} n_i - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i n_i\right)^2\right]$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ПО ФОРМУЛЕ $D = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} D_j n_j$, ГДЕ m – ЧИСЛО ГРУПП, НА КОТОРЫЕ РАЗБИТА ВЫБОРКА, ВЫЧИСЛЯЕТСЯ

1) Внутригрупповая дисперсия
2) Межгрупповая дисперсия
3) Групповая дисперсия
4) Общая дисперсия
5) Выборочная дисперсия

Ответы:1) 4; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 1

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к практическому занятию «Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений, оценка качества измерений»

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11,6, 9, 8, 10, 7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней, интервальную оценку с вероятностью 0,95.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Интервальные оценки

Интервальной оценкой называется множество точечных оценок, которое зависит от результатов наблюдений и, следовательно, является случайным. Интервальной называется оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Поэтому каждой интервальной оценке ставится в соответствие доверительная вероятность или надежность, с которой эта оценка накроет неизвестный параметр. В качестве надежности берут число близкое к единице.

Вероятность того, что интервал $(\Theta^*-\delta, \Theta^*+\delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ, равна *p*: $P[\Theta^*-\delta<\Theta< \Theta^*+\delta]=p$. Доверительным называется интервал $(\Theta^*-\delta, \Theta^*+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Наиболее часто *p* равно *0,9; 0,95; 0,99; 0,999*. При исследованиях в фармации, медицине и биологии доверительную вероятность принимают равной *0,95*.

Нахождение доверительного интервала для оценки μ нормального распределения при неизвестном σ. Распределение Стьюдента

Пусть случайная величина *X* имеет нормальное распределение, причем σ и μ неизвестны. По данным выборки можно построить случайную величину *T* (ее возможные значения обозначим через *t*): $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{x}}}$, где $\bar{x}$ – выборочная средняя из *n* наблюдений; $S_{\bar{x}}$ – оценка среднего квадратического откло

Распределение T с f=n-1 степенями свободы называется t-распределением или распределением Стьюдента. Функция плотности вероятности зависит от числа степеней свободы f и не зависит от дисперсии случайных величин σ. Пользуясь распределением Стьюдента можно определить доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр μ с надежностью γ $\left(\bar{x} - t_p(f)S_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + t_p(f)S_{\bar{x}}\right)$.

Таким образом, интервальной оценкой математического ожидания является доверительный интервал $\left(\bar{x} - t_p(f)S_{\bar{x}}, \bar{x} + t_p(f)S_{\bar{x}}\right)$.

Погрешности измерений. Истинная, абсолютная и относительные погрешности

Результаты измерений почти никогда не дают точного (истинного) значения величин, поскольку они содержат те или иные погрешности. Если x – измеренное значение величины a, то $|a–x|$ называется истинной абсолютной погрешностью x, а величина $\frac{|a-x|}{a}$ – истинной относительной погрешностью x. Полностью учесть и исключить погрешности невозможно, однако можно оценить пределы погрешностей измерений, указав граничную величину истинной абсолютной погрешности, т. е. положительное число Δx, для которого выполняется неравенство: $|a–x|\leq\Delta x$. Величина Δx называется абсолютной погрешностью.

Типы погрешностей

Систематические, кот при многократном измерении одной и той же величины остаются постоянными или меняются по определенному закону.

Случайные – неопределенные по величине и природе погрешности, обусловленные причинами, зависящими от измерительного устройства.

Промахами или грубыми погрешностями называются погрешности, существенно превышающие случайные и систематические погрешности.

Оценка истинного значения измеряемой величины

Пусть производится n независимых равноточных измерений некоторой физической величины, истинное значение μ которой неизвестно. Будем рассматривать результаты отдельных измерений как случайные величины x_1; x_2; …; x_n. Эти величины независимы (измерения независимы), имеют одно и то же математическое ожидание μ (истинное значение измеряемой величины), одинаковые дисперсии σ (измерения равноточные) и распределены нормально (такое допущение подтверждается опытом). Истинное значение измеряемой величины можно оценивать по среднему арифметическому результатов отдельных измерений при помощи доверительных интервалов.

Абсолютная погрешность среднего арифметического $\Delta\bar{x}$ *независимых измерений оценивается по формуле:*

$$\Delta\bar{x} = t_p(f)S_{\bar{x}}.$$

Интервальной оценкой величины *x* является доверительный интервал $(\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x})$, в который попадает истинное значение с заданной доверительной вероятностью. Окончательный результат измерений запишется в виде: $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$.

Относительная погрешность среднего арифметического: $E\% = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}}100\%$

Занятие №17

Тема: Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений, оценка качества измерений

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешности прямых и косвенных измерений.

Студент должен иметь практический опыт: вычисления погрешностей.

Студент должен знать: понятие погрешности измерений; формулы абсолютной и относительной погрешности для прямых измерений, а также формулы вычисления абсолютной погрешности косвенно измеряемой величины.

Студент должен уметь: вычислять среднее арифметическое наблюдаемых значений; оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего; находить коэффициент Стьюдента по таблице; правильно записывать результаты измерений.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

- способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;
- способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

- создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);
- создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);
- создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);
- содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

Хронокарта занятия

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел;	Таблицы, методические разработки для	Аудитория кафедры физики и	30

	чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	студентов	математики	
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий на контроль усвоения.	программа компьютерного тестирования Veral Test	Тестовые задания по данной теме, ситуационные задачи.	Аудитория кафедры физики и математики	10
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие погрешности измерений.
2. Формула абсолютной погрешности для косвенно измеряемой величины.
3. Формула относительной погрешности для косвенно измеряемой величины.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

Рассмотреть решение задач:

1. Вычислить объем куба с ребром $x \approx (12{,}5 \pm 0{,}05)$ см. Оценить качество измерений.

Решение. Объем куба $V = x^3$; $\overline{V} = (12{,}5)^3 = 1953{,}125$.

Найдем абсолютную погрешность: $\Delta V = |V'_x \cdot \Delta x| = \left|3x^2 \cdot \Delta x\right| = 3 \cdot (12{,}5)^2 \cdot 0{,}05 = 23{,}4375$.

Тогда $V \approx (1950 \pm 24)$см^3.

Найдем относительную погрешность: $E\% = \frac{\Delta\overline{V}}{\overline{V}} 100\% = \frac{24}{1950} 100\% = 1{,}2\%$.

Ответ: $V \approx (1950 \pm 24)$см^3, качество измерений удовлетворительное.

2. Вычислить объем прямоугольного параллелепипеда, если длины его ребер: $a \approx (5{,}0 \pm 0{,}05)$ см; $b \approx (10{,}0 \pm 0{,}05)$ см; $c \approx (12{,}0 \pm 0{,}05)$ см. Оценить качество измерений.

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$. Тогда $\overline{V} = 5 \cdot 10 \cdot 12 = 600$ см^3.

Найдем абсолютную погрешность: $\Delta V = \sqrt{(V'_a \Delta a)^2 + (V'_b \Delta b)^2 + (V'_c \Delta c)^2}$. Так как $V'_a = (abc)'_a = bc$; $V'_b = (abc)'_b = ac$; $V'_c = (abc)'_c = ab$, то $\Delta\overline{V} = \sqrt{(bc\Delta a)^2 + (ac\Delta b)^2 + (ab\Delta c)^2} = \sqrt{(10 \cdot 12 \cdot 0{,}05)^2 + (5 \cdot 12 \cdot 0{,}05)^2 + (10 \cdot 5 \cdot 0{,}05)^2}$

$\Delta\overline{V} \approx 7{,}158 \approx 7{,}2$ (см^3).

Найдем относительную погрешность: $E\% = \frac{\Delta\overline{V}}{\overline{V}} 100\% = \frac{7{,}2}{600} 100\% = 0{,}84\%$

Ответ: Объем равен: $V \approx (600 \pm 7{,}2)$см^3; качество измерений хорошее.

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь круга с радиусом $r \approx (10{,}0 \pm 0{,}1)$см, считая $\pi \approx 3{,}1416$, т.е. как точное число, погрешность которого мала.

2. Вычислить площадь треугольника с основанием $a \approx (2{,}15 \pm 0{,}02)$ см и высотой $h \approx (3{,}25 \pm 0{,}02)$ см.

3. Вычислить площадь прямоугольника, если измерения длин сторон: $x \approx (12{,}0 \pm 0{,}1)$*мм*; $y \approx (22{,}0 \pm 0{,}2)$*мм*.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО Δ ТАКОЕ, ЧТО $|\Theta - \Theta^*| < \Delta$, ГДЕ Θ - ОЦЕНИВАЕМЫЙ ПАРАМЕТР, Θ^* - ЕГО СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА, НАЗЫВАЕТСЯ

    1) Надежностью
    2) Доверительной вероятностью
    3) Точностью
    4) Доверительным интервалом
    5) Доверительной границей

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НАДЕЖНОСТЬЮ ОЦЕНКИ Θ^* ПАРАМЕТРА Θ НАЗЫВАЕТСЯ

    1) Величина $\Theta^* - \delta$, где $\delta>0$
    2) Величина $\Theta^* + \delta$, где $\delta>0$
    3) Интервал $(\Theta^* - \delta; \Theta^* + \delta)$
    4) Положительное число δ такое, что $|\Theta - \Theta^*| < \delta$
    5) Вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИМЕЕТ ВИД:

    1) $(\bar{x}_B - \delta;\ \bar{x}_B + \delta)$
    2) $(\bar{x}_B - \sigma;\ \bar{x}_B + \sigma)$
    3) $(\bar{x}_B - \frac{\sigma}{n};\ \bar{x}_B + \frac{\sigma}{n})$
    4) $(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}})$
    5) $(\bar{x}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ [s(1- q); s(1+ q)] ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИМЕНЯЕТСЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ

1) Исправленного стандарта
2) Математического ожидания
3) Выборочной средней
4) Выборочной дисперсии
5) Среднего квадратического отклонения

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. В ТЕОРИИ ОШИБОК ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ($\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$) ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ

1) Относительной погрешности измерений
2) Относительной погрешности прибора
3) Истинного значения измеряемой величины
4) Точности измерений
5) Точности прибора

Ответы:1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 5; 5) 3

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

6. Задание на дом.

1. Подготовиться к итоговому тестированию.

Самостоятельная внеаудиторная работа обучающихся:

1. Вычислить объем цилиндра, если высота $h \approx (50 \pm 0{,}1)\,мм$, радиус основания $r \approx (15{,}0 \pm 0{,}1)\,мм$.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК

Вычисление абсолютной погрешности

косвенных измерений

Если искомая величина *y* связана с измеряемой *x* функциональной зависимостью: $y=f(x_1,x_2,\dots x_n)$, то такая величина называется *косвенно измеряемой*.

На практике достаточно часто требуется найти косвенно измеряемую величину и абсолютную и относительную погрешности косвенных измерений.

Пусть $y=f(x)$ – функция зависит от одной переменной *x*. Были проведены измерения величины $x\approx(\bar{x}\pm\Delta x)$, где $\bar{x}$ – среднее арифметическое прямых измерений величины *x*, а Δx – погрешность прибора или абсолютная погрешность прямых измерений.

Значение косвенно измеряемой величины вычисляется по формуле $\bar{y}=f(\bar{x})$.

Абсолютная погрешность величины y вычисляется по формуле:

$$\Delta y=\left|y'_x\Delta x\right|,$$

где y'_x *– производная y по переменной x.*

Относительная погрешность вычисляется по формуле: $E\%=\dfrac{\Delta y}{\bar{y}}100\%$.

Пусть $z=f(x,y)$ – функция, зависящая от двух переменных x и y. Проведены измерения величин *x* и *y*: $x\approx(\bar{x}\pm\Delta x)$ и $y\approx(\bar{y}\pm\Delta y)$, где $\bar{\boldsymbol{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{y}}$ – средние арифметические прямых измерений величин *x* и *y*, Δx и Δy – погрешности приборов или абсолютные погрешности прямых измерений.

Значение косвенно измеряемой величины вычисляется по формуле $\bar{z}=f(\bar{x},\bar{y})$.

Абсолютная погрешность величины z=f(x,y) вычисляется по формуле:

$$\Delta z=\sqrt{\left(z'_x\Delta x\right)^2+\left(z'_y\Delta y\right)^2}.$$

Относительная погрешность вычисляется по формуле $E\%=\dfrac{\Delta z}{\bar{z}}100\%$

Занятие №18

Тема: Компьютерное тестирование

Место проведения: аудитория кафедры физики и математики

Время проведения: 90 минут

Формируемые компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ПК-1.8, ПК-3.4.

Цели:

Учебные: определение качества знаний.

Студент должен иметь практический опыт: решения типовых заданий.

Студент должен знать: основные определения и формулировки теорем, методику решения простейших задач.

Студент должен уметь: приводить примеры к вопросам пройденных разделов.

Воспитательные:

– способствовать воспитанию чувства ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга;

– способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения;

– способствовать развитию культуры взаимоотношений при работе в парах, группах, коллективе.

Развивающие:

– создать условия для развития коммуникативных навыков через разнообразные виды речевой деятельности (устные ответы на вопросы, участие в дискуссии, защита результатов);

– создать условия для развития таких аналитических способностей учащихся, как умение анализировать, делать выводы (анализ полученных результатов, формировка выводов по результатам изучения);

– создать условия для развития памяти, внимания (составление краткого опорного конспекта);

– содействовать формированию самостоятельной познавательной деятельности (подготовка краткого сообщения – эссе)

<u>Хронокарта занятия</u>

Этапы занятия	Материалы и оборудование	Учебные пособия и средства контроля	Место проведения	Время в мин.
1. Организационные мероприятия.		Журнал учета посещений занятий.	Аудитория кафедры физики и математики	5
2. Проверка знаний по теме занятия.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов,	Контрольные вопросы по теме задания для проверки исходного уровня.	Аудитория кафедры физики и математики	5

	дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)			
3. Инструктаж преподавателем	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Таблицы, методические разработки для студентов	Аудитория кафедры физики и математики	30
4. Самостоятельная работа студентов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Работа с конспектом	Аудитория кафедры физики и математики	25
5. Обсуждение результатов.	доска; мел; чертежные инструменты; таблицы (интегралов, дифференциалов, значений коэффициентов Стьюдента)	Собеседование.	Аудитория кафедры физики и математики	10
6. Решение тестовых заданий	программа компьютерного	Тестовые задания по	Аудитория кафедры	10

на контроль усвоения.	тестирования Veral Test	данной теме, ситуационные задачи.	физики и математики	
7. Задание на следующее занятие.		Литература, лекции, методические разработки.	Аудитория кафедры физики и математики	5

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:**

Контрольные вопросы:

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

а) подготовка студентов к самостоятельной работе (*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).*

б) самостоятельная работа студентов

Вопросы для теоретического тестирования

1. Понятие функции.
2. Определение предела функции.
3. Определение бесконечно малой функции.

4. Основные теоремы о пределах.
5. Определение производной функции.
6. Производная сложной функции.
7. Таблица основных формул дифференцирования.
8. Механический и геометрический смысл производной.
9. Определение дифференциала функции.
10. Аналитический и геометрический смысл дифференциала функции
11. Свойства дифференциала функции.
12. Производные и дифференциалы высших порядков.
13. Определение возрастающей /убывающей функции.
14. Необходимое и достаточное условия возрастания/убывания функции.
15. Определение экстремума функции.
16. Понятие локального и глобального экстремумов функции.
17. Необходимое и достаточное условия экстремума
18. Определение критических точек функции.
19. Определение функции двух аргументов.
20. Определение частного и полного приращений функции.
21. Определение частных производных функции двух аргументов.
22. Частные дифференциалы функции двух аргументов.
23. Полный дифференциал функции двух аргументов.
24. Определение первообразной функцией
25. Определение неопределенного интеграла.
26. Свойства неопределенного интеграла.
27. Таблица простейших интегралов.
28. Простейшие методы интегрирования.
29. Определенный интеграл как предел интегральной суммы
30. Свойства определенного интеграла.
31. Геометрический смысл определенного интеграла.
32. Формула Ньютона-Лейбница
33. Задача о площади криволинейной трапеции.
34. Работа переменной силы.
35. Вычисление пути, пройденного телом
36. Понятие испытания, события, виды событий.
37. Определение полной группы событий.
38. Классическая вероятность события
39. Свойства вероятности.
40. Относительная частота события.
41. Статистическая вероятность события.
42. Теорема сложения для несовместных событий
43. Следствия из теоремы сложения.
44. Теорема умножения для независимых событий.
45. Терема умножения для зависимых событий.
46. Формула Бернулли. Формула Пуассона.
47. Определение случайной величины.
48. Дискретная случайная величина.

49. Закон распределения дискретной случайной величины
50. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
51. Непрерывная случайная величина.
52. Функция распределения случайной величины
53. Свойства функции распределения
54. Плотность распределения вероятностей.
55. Характеристики непрерывных случайных величин.
56. Нормальное распределение.
57. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
58. Генеральная и выборочная совокупности
59. Статистический дискретный ряд распределения
60. Статистический интервальный ряд распределения
61. Эмпирическая функция распределения
62. Оценки характеристик распределения
63. Частные производные функции двух аргументов.
64. Частные и полные дифференциалы функции двух аргументов.
65. Определение косвенно измеряемой величины.
66. Абсолютная погрешность косвенных измерений.
67. Относительная погрешность косвенных измерений.
68. Интервальные оценки.
69. Доверительный интервал и доверительная вероятность.
70. Распределение Стьюдента.
71. Нахождение доверительного интервала для оценки μ нормального распределения при неизвестном σ.
72. Погрешности измерений.
73. Истинная, абсолютная и относительные погрешности.
74. Оценка истинного значения измеряемой величины.

4. Итоговый контроль:

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

5. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература				
Основная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л1.1	Павлушков И.В	Основы высшей математики и статистики. [Текст]: учеб.	ГЭОТАР-Медиа, 2008	308
Дополнительная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л2.1		Теория вероятностей и математическая статистика. [Текст] : учеб. пособие для бакалавров 12-е изд.	М.: Юрайт, 2014	20
Л2.2	Ивченко Г.И. Медведев Ю.И.	Введение в математическую и статистику. [Текст]: учеб.	М.: Изд-во ЛКИ, 2014	20
Методические разработки				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л3.1	Стригун Н.С. Воронина С.В. Кошкарова А.Г. Казуб В.Т.	Математика [электронный ресурс]: методическое пособие к практическим занятиям для студентов специальности среднего профессионального образования: 31.02.01 – фармация – Режим доступа: http :// www.pmedpharm.ru	Пятигорск: ПМФИ, 2016	-
5.2. Электронные образовательные ресурсы				
Л4.1	Омельченко В.П.	Математика [Электронный ресурс]: учебник - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа, 2017.	

Л4.2	Павлушков И. В. Розовский Л. В. Наркевич И. А.	Математика [Электронный ресурс]: учебник - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа, 2013.
Л4.3	Греков Е.В.	Математика [Электронный ресурс] : учебник для фармацевт. и мед. вузов - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа-, 2015
Л4.4	Павлушков И.В	Основы высшей математики и математической статистики [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа, 2012.
Л4.5	Баврин И.И Кибзун А. И	Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей [Электронный ресурс] - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Программное обеспечение

1. Microsoft Office 365. Договор с ООО СТК «ВЕРШИНА» №27122016-1 от 27 декабря 2016 г.
2. Kaspersky Endpoint Security Russian Edition. 100149 Educational Renewal License 1FB6161121102233870682. 100 лицензий.
3. Office Standard 2016. 200 лицензий OPEN 96197565ZZE1712.
4. Microsoft Open License :66237142 OPEN 96197565ZZE1712. 2017
5. Microsoft Open License : 66432164 OPEN 96439360ZZE1802. 2018.
6. Microsoft Open License : 68169617 OPEN 98108543ZZE1903. 2019.
7. Операционные системы OEM, OS Windows XP; OS Windows 7; OS Windows 8; OS Windows 10. На каждом системном блоке и/или моноблоке и/или ноутбуке. Номер лицензии скопирован в ПЗУ аппаратного средства и/или содержится в наклеенном на устройство стикере с голографической защитой.
8. Система автоматизации управления учебным процессом ООО «Лаборатория ММИС»
9. Доступ к личному кабинету в системе «4Portfolio». Договор № В-21.03/2017 203 от 29 марта 2017
10. Доступ к личному кабинету в системе «ЭИОС»
11. Система электронного тестирования VeralTestProfessional 2.7. Акт предоставления прав № ИТ178496 от 14.10.2015 (бессрочно)
12. Statistica Basic 10 for Windows Ru License Number for PYATIGORSK MED PHARM INST OF VOLGOGRAD MED ST UNI (PO# 0152R, Contract № IE-QPA-14-XXXX) order# 310209743.

ПЯТИГОРСКИЙ МЕДИКО-ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Министерства здравоохранения Российской Федерации
Медицинский колледж ПМФИ

Кафедра физики и математики

Авторы: Воронина С.В., Стригун Н.С., Болгова Ю.А.

Методические материалы (указания, разработки, рекомендации) для студентов по дисциплине «Математика».

специальность 33.02.01 «Фармация»

Пятигорск 202___

Занятие №1

Тема: Нахождение области определения функции и множество значений функции

Цели: выработать навыки нахождения области определения функции и множество значений функции.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения области определения и множества значений функции.

Студент должен знать: свойства функции, основные элементарные функции;

Студент должен уметь: находить область определения функции и строить графики.

Ход занятия

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

Инструктаж по технике безопасности при работе с компьютерами

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие функции
2. Способы задания
3. Четные, нечетные функции
4. Периодичность
5. Область определения, множество значений.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш, линейка	Самостоятельная проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Найти область определения функций.

$a)\ y = \log_2\left(x^2 - 5x + 6\right)$

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x = 2\ и\ x = 3$

$x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции f(x)=x^3-3x^2+4.
2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-6)}$ на отрезке: $[0;7]$.
3. Найти точки разрыва функции:

1. $y = \dfrac{x+\pi}{\sin \pi x}$; 2. $y = \dfrac{x+1}{x^3-1}$;

3. $y = \dfrac{x-1}{x^3+1}$; 4. $y = \dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

5. $y = \dfrac{x+2}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+2}$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением программы Veral Test или бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ В ТОЧКЕ $x=2$:

а) $\dfrac{3}{2}$; б) $\dfrac{2}{3}$; в) 2; г) $\dfrac{2}{5}$.

2. НАЙДИТЕ НЕДОСТАЮЩУЮ КООРДИНАТУ ТОЧКИ $P(x;3)$, ЕСЛИ ОНА ПРИНАДЛЕЖИТ ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$:

а) $\dfrac{9}{4}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\dfrac{4}{9}$; г) $\dfrac{1}{2}$.

3. ЗАВИСИМОСТЬ $y=f(x)$ ИМЕЕТ ВИД ЛИБО $y=kx$, ЛИБО $y=\dfrac{c}{x}$, ЛИБО $y=ax^2$. ЗАДАЙТЕ ФОРМУЛОЙ ФУНКЦИЮ, ЗАДАННУЮ ПАРАМИ $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$, $(1;4)$:

а) $y=2x^2$; б) $y=\dfrac{4}{x}$; в) $y=4x$; г) $y=2x$.

4 . ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $y=\frac{x+2}{x^2+2}$ ПРИ $x=-1$:

а)1; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 2.

5. НАЙДИТЕ НЕДОСТАЮЩУЮ КООРДИНАТУ ТОЧКИ $P(x;2)$, ЕСЛИ ОНА ПРИНАДЛЕЖИТ ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $y=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$:

а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 2; г) 4.

5. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие функции, виды, способы задания.
2. Возрастание и убывание функций.
3. Монотонность функций. Точки разрыва функций.
4. Графики основных элементарных функций.
5. Найти область определения функции

а) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-3}$ б) $f(x)=-\frac{2}{4-x^2}$ в) $f(x)=\sqrt{3-2x}$

Занятие №2

Тема: Построение элементарных графиков функций, преобразования графиков

Цели: научиться строить графики элементарных функций.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения области определения и построения графиков функций.

Студент должен знать: свойства функции, основные элементарные функции;

Студент должен уметь: находить область определения функции и строить графики.

Ход занятия

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются

методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

7. Линейная функция.
8. Степенная функция.
9. Показательная функция.
10. Логарифмическая функция.
11. Тригонометрические функции.
12. Правила преобразование графиков функций.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш, линейка	Самостоятельная проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Примеры. Найти области определения и значений функций:

1. $y=2x+5 \quad \Rightarrow \quad D(y)=R$; $E(y)=R$.

2. $y=\ln|x| \quad \Rightarrow \quad D(y)=(-\infty;\, 0)\cup(0;\, \infty)$; $E(y)=R$.

3. $y=\sqrt{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad D(y)=[-2;\, 2]$; $E(y)=[0;\, 2]$.

4. $y=\sqrt{(1-x^2)(x^2-1)} \quad \Rightarrow \quad D(y)=\{-1;\, 1\}$; $E(y)=\{0\}$.

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти область определения функции:

6. $y=\sqrt{x^2-x-20}+\dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}}$
7. $y=lg\dfrac{x^2-9}{x-2}$
8. $y=\sqrt{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{x-5}$
9. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}}$
10. $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

Построить график функции:

6. $y=x^2-5|x|+6$
7. $y=|x^2-5x+6|$
8. $y=\dfrac{2}{x}-2$
9. $y=3^{-x}+1$
10. $y=2^{|x|+3}$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов в применением программы Veral Test или бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ОТВЕТ. ПРЕДЕЛ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ РАВЕН

6) ½
7) 1
8) 0
9) ¼
10) ∞

2. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИИ НА РАЗРЫВ В ТОЧКЕ X_0 МОЖЕТ ИМЕТЬ МЕСТО СЛЕДУЮЩИЕ СЛУЧАИ

6) x_0 – точка непрерывности функции
7) x_0 – точка частичного разрыва функции
8) x_0 – точка устранимого разрыва функции
9) x_0 – точка конечного разрыва функции (1-го рода)
10) x_0 – точка бесконечного разрыва функции (2-го рода)

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ЕСЛИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИИ НА РАЗРЫВ В ТОЧКЕ X_0 ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В ЭТОЙ ТОЧКЕ СУЩЕСТВУЮТ, НО НЕ РАВНЫ, ТО ФУНКЦИЯ В ТОЧКЕ

6) x_0 непрерывна
7) x_0 не определена
8) x_0 терпит устранимый разрыв
9) x_0 терпит конечный разрыв (1-го рода)
10) x_0 терпит бесконечный разрыв (2-го рода)

4. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ОТВЕТ. ФУНКЦИЯ $У=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ В ТОЧКЕ $X=0$

6) непрерывна
7) не определена
8) терпит устранимый разрыв
9) терпит конечный разрыв (1-го рода)
10) терпит бесконечный разрыв (2-го рода)

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ОБЛАДАЕТ СЛЕДУЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

6) алгебраическая сумма или разность непрерывных функций есть непрерывная функция
7) произведение конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция
8) частное от деления двух непрерывных функций есть непрерывная функция за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в ноль
9) при возведении непрерывной функции в степень непрерывность сохраняется
10) непрерывная функция на ограниченном отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значения

5. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

1. Линейная функция.
2. Степенная функция.
3. Показательная функция.

4. Логарифмическая функция.
5. Тригонометрические функции.
6. Правила преобразование графиков функций.
7. Заполнить таблицу «Основные элементарные функции»

№ п/п	*Обозначение функции*	*Область определения*	*Область значений*	*Четность, нечетность*	*Монотон-ность*	*Перио-дичность*	*Графики функций*
1.							

Занятие №3

Тема: Вычисление производных функций

Цели: закрепить приобретенные в школе навыки нахождения производной функций одной переменной.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного аргумента.

Студент должен знать: понятие приращения аргумента и функции, производной функции, ее геометрический и механический смысл, основные правила дифференцирования и таблицу производных; понятие дифференциала функции, геометрический и аналитический смысл дифференциала, свойства дифференциала.

Студент должен уметь: применять основные правила дифференцирования и таблицу производных при решении примеров, находить дифференциалы функций одной переменной, использовать свойства дифференциалов, находить производные и дифференциалы функций одной переменной.

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

7. Производные элементарных функций.
8. Производная произведения.
9. Производная частного
10. Геометрический смысл производно.
11. Физический смысл производной.
12. Производная сложной функции.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	Средства действия	Критерии самоконтроля
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш, линейка	Самостоятельная проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Рассмотреть решение задач:

Пример 1. Найти производную функции $f(x)=3x^4-4^x+2x-5$.

Решение. $f'(x)=\left(3x^4-4^x+2x-5\right)'=\left(3x^4\right)'-\left(4^x\right)'+(2x)'-(5)'=$

$=3\cdot\left(x^4\right)'-4^x\cdot ln4+2-0=3\cdot4\cdot x^{4-1}-4^x\cdot ln4+2=12x^3-4^x\cdot ln4+2.$

Пример 2. Найти производную функции $f(x)=\dfrac{ln\,x-4}{e^x}$.

Решение. $f'(x)=\left(\dfrac{ln\,x-4}{e^x}\right)'=\dfrac{(ln\,x-4)'\cdot e^x-\left(e^x\right)'\cdot(ln\,x-4)}{\left(e^x\right)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot e^x-e^x(ln\,x-4)}{e^{2x}}=\frac{e^x\left(\frac{1}{x}-ln\,x+4\right)}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{x}-ln\,x+4}{e^x}=\frac{1-x\,ln\,x+4x}{xe^x}.$$

Пример 3. Вычислить $f'(8)$, если $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Решение. Найдем $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Вычислим $f'(8)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{12}$.

Пример 4. Найти дифференциал функции: $f(x)=e^x+2x$.

Решение. На основании свойства 2 дифференциала функции и определения дифференциала имеем:

$$df=d\left(e^x+2x\right)=d\left(e^x\right)+d(2x)=e^x dx+2dx.$$

Примерные задания для самостоятельного решения

1-2 Найти производные функции

3 Найти производную третьего порядка

№1

4. $y=cos\,2x\cdot 2^x+\sqrt{x}-4$
5. $y=\dfrac{x^2}{ln\,x+3}$
6. $y=x^2\,ln\,x$

№2

4. $y=x^4\,log_5\,x+6tg2x+2$
5. $y=\dfrac{tg2x+1}{cos\,x}$
6. $y=3cos\,2x+4x^3-6$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ НАЗЫВАЕТСЯ

6) предел отношения приращения аргумента к приращению функции при стремлении последнего к нулю
7) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при неограниченном возрастании последнего
8) предел отношения приращения аргумента к приращению функции при неограниченном возрастании последнего
9) предел отношения функции к приращению функции при стремлении последнего к нулю
10) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю

2. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ X_0 ЧИСЛЕННО РАВНА

6) приращению функции в этой точке
7) тангенсу угла касательной, образованному с положительным направлением оси ординат, к графику функции в точке x_0
8) приращению касательной
9) тангенсу угла касательной, образованному с положительным направлением оси абсцисс, к графику функции в точке x_0
10) приращению секущей хорды

3. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНО ЗАПИСАННОЕ СВОЙСТВО ПРОИЗВОДНОЙ

1) $(C)' = 1$

2) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = \arcsin x$

1) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

4) $y' = \frac{1}{1+x^2}$

5) $y' = \frac{1}{1-x^2}$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = ctgx$

1) $y' = -tgx$

2) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

3) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

4) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

5) $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$

5. Задание на дом.

2. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление производной сложной функции».

1-2 Найти производные функции

4 Найти производную третьего порядка

№1	*№2*
7. $y = sin3x \cdot ln\,x - x^3 + 6$	10. $y = x^4 tg6x - 2\,sin\,x + 1$
8. $y = \frac{cos\,x}{x^4 - 2\sqrt{x} + 4}$	11. $y = \frac{cos\,x + sin\,x}{x+1}$
9. $y = x\,cos\,x - x^5$	12. $y = xe^{2x} + x^2 - 4$

Занятие №4

Тема: **Вычисление производной сложной функции**

Цели: закрепить приобретенные в школе навыки нахождения производных сложных функций.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного аргумента.

Студент должен знать: понятие производной сложной функции, основные правила дифференцирования и таблицу производных; понятие дифференциала функции, геометрический и аналитический смысл дифференциала, свойства дифференциала.

Студент должен уметь: применять основные правила дифференцирования и таблицу производных при решении примеров, находить производные сложных функций.

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

3. Понятие сложной функции.
4. Нахождение производной сложной функции.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	Средства действия	Критерии самоконтроля
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш, линейка	Самостоятельная проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^2 \cdot e^{\sin x}$.

Решение. $f'(x) = \left(x^2 \cdot e^{\sin x}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^{\sin x} + \left(e^{\sin x}\right)' \cdot x^2 =$

$= 2x \cdot e^{\sin x} + e^{\sin x}(\sin x)' \cdot x^2 = 2x \cdot e^{\sin x} + e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot x^2 = e^{\sin x}\left(2x + x^2 \cos x\right).$

Пример 2. Найти производную функции: $f(x) = \sqrt{tg\left(e^x\right)}$.

Решение. Преобразуем функцию $f(x) = \sqrt{tg\left(e^x\right)} = tg^{\frac{1}{2}}\left(e^x\right) = \left(tg\left(e^x\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда: $f'(x) = \left(\left(tg\left(e^x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} tg^{\frac{1}{2}-1}\left(e^x\right) \cdot \left(tg\left(e^x\right)\right)' = \frac{1}{2} tg^{-\frac{1}{2}}\left(e^x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(e^x\right)} \cdot \left(e^x\right)' =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{tg^{\frac{1}{2}}\left(e^x\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(e^x\right)} \cdot e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{tg\left(e^x\right)}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(e^x\right)}.$

Пример 3. Найти дифференциал функции: $f(x) = \ln(\cos x)$

Решение. Функцию можно записать в виде: $f(x) = \mathbf{ln}\, u$, $u = \mathbf{cos}\, x$. *Тогда имеем:*

$$df = (\ln u)'_u \cdot du = \frac{1}{u} d(\cos x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx = -\frac{\sin x}{\cos x} dx = -tgx dx$$

Пример 4. Найти вторую производную функции: $f(x) = \mathbf{ln}\frac{1+2x}{1-2x}$

Решение. Преобразуем функцию $f(x) = \ln\frac{1+2x}{1-2x} = \ln(1+2x) - \ln(1-2x)$.

Найдем первую производную: $f'(x) = \left(\ln(1+2x) - \ln(1-2x)\right)' =$

$= \left(\ln(1+2x)\right)' - \left(\ln(1-2x)\right)' = \frac{1}{1+2x} \cdot (1+2x)' - \frac{1}{1-2x} \cdot (1-2x)' =$

$= \frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x} = \frac{2(1-2x) + 2(1+2x)}{1-4x^2} = \frac{4}{1-4x^2};$

найдем вторую производную:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{4}{1-4x^2}\right)'=4\left(\left(1-4x^2\right)^{-1}\right)'=-4\left(1-4x^2\right)^{-2}\cdot\left(1-4x^2\right)'=$$

$$=-4\left(1-4x^2\right)^{-2}\cdot(-8x)=\frac{32x}{\left(1-4x^2\right)^2}.$$

Пример 5. Найти дифференциал второго порядка от функции $f(x)=sin(2x+3)$.

Решение. Найдем дифференциал второго порядка на основании выражения для вычисления d^2f :

$d^2f = f''(x)dx^2=\left(sin(2x+3)\right)''dx^2$. Найдем сначала первую производную:

$f'(x)=\left(sin(2x+3)\right)'=cos(2x+3)(2x+3)'=2cos(2x+3)$; найдем вторую производную: $f''(x)=\left(2cos(2x+3)\right)'=-2sin(2x+3)(2x+3)'=-4sin(2x+3)$.

Тогда $d^2f = f''(x)dx^2=-4sin(2x+3)dx^2$.

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти производные функций:

4. $f(x)=\sqrt{2x-\boldsymbol{ln}\,x}$.
5. $f(x)=\boldsymbol{sin}\sqrt{x}$.
6. $f(x)=\boldsymbol{ln}\dfrac{1+x}{1-x}$.

Найти дифференциал функции:

7. $f(x)=ln(sin\,x)$.
8. $f(x)=\sqrt{1+x^3}$.
9. $f(x)=xe^{x^2+1}$.

Найти вторые производные следующих функций:

8. $f(x)=e^{x^2}$.

Найти производные второго порядка и записать дифференциалы второго порядка для следующих функции:

9. $f(x) = 2x\cos x$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = a^x$

1) $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

2) $y' = a^x$

3) $y' = \dfrac{\ln a}{x}$

4) $y' = \dfrac{a^x}{\ln a}$

5) $y' = a^x \cdot \ln a$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = a \cdot \sqrt{1+x^2}$

1) $y' = \dfrac{2ax}{\sqrt{1+x^2}}$

2) $y' = \dfrac{a'\sqrt{1+x^2} - \dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

3) $y' = \dfrac{ax}{2\sqrt{1+x^2}}$

4) $y' = \dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$

5) $y' = -\dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$

3. ПУСТЬ *U(X)* И V(X) – ДВЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО НЕЗАВИСИМОГО АРГУМЕНТА. УКАЖИТЕ, ДЛЯ КАКОГО ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ ТИПОВ ФУНКЦИЙ ПРИМЕНЯЕТСЯ МЕТОД ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1) $y = u(x) \cdot v(x)$

2) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

3) $y = \ln[u(x) \cdot v(x)]$

4) $y = u(x)^{v(x)}$

5) $y = a^{u(x)} \cdot b^{v(x)}$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНУЮ ФОРМУЛУ, ПО КОТОРОЙ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПРОИЗВОДНАЯ 1-ГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

1) $y'(x) = \dfrac{x'(t)}{y'(t)}$

2) $y'(t) = \dfrac{x'(x)}{y'(x)}$

3) $y'(x) = \dfrac{y'(t) \cdot x(t) - x'(t) \cdot y(t)}{[x'(t)]^2}$

4) $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

5) $y'(t) = \dfrac{y'(x)}{x'(x)}$

5. УКАЖИТЕ, ДЛЯ КАКОЙ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫПОЛНЯЕТСЯ РАВЕНСТВО $y''' = \dfrac{2}{x^3}$

1) $y = \ln x$

2) $y = \dfrac{1}{x}$

3) $y = \dfrac{2}{x}$

4) $y = -\ln x$

5) $y = -2x^{-1}$

5. Задание на дом.

2. Подготовиться к практическому занятию «Возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции».
3. Определить производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

а) $y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y=(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x)^3$; в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{x^3-6x}}$;
д) $y=(2x+3)^{tgx}$.

Занятие № 5

<u>Тема:</u> Возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции

<u>Цель:</u> научиться применять дифференциальное исчисление для решения прикладных задач.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного аргумента при решении прикладных задач.

Студент должен знать: необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции, необходимое и достаточное условие экстремума функций.

Студент должен уметь: решать прикладные задачи на применение дифференциального исчисления.

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент: отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний: контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

4. Экстремумы функции.
5. Промежутки возрастания и убывания функции.
6. Наименьшее и наибольшее значение функции.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	Средства действия	Критерии самоконтроля
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = 0{,}01x^3$, проведенной в точке с абсциссой $x=2$.

Решение. На основании геометрического смысла производной имеем, что угловой коэффициент равен производной функции в точке, абсцисса которой равна x. Найдем $y' = \left(0{,}01x^3\right)' = 0{,}03x^2$.

Вычислим $k = y'(2) = 0{,}03 \cdot 2^2 = 0{,}12$ – угловой коэффициент касательной к графику функции.

Пример 2. Популяция бактерий в момент времени t (t измеряется в часах) насчитывает $p(t) = 3000 + 100t^2$ особей. Найти скорость роста бактерий. Найти скорость роста бактерий в момент времени $t = 5$ часов.

Решение. Скорость роста популяции бактерий – это первая производная $p(t)$ по времени t: $p'(t) = \left(3000 + 100t^2\right)' = 200t$.

Если $t = 5$ часов, то $p'(5) = 200 \cdot 5 = 1000$. Следовательно, скорость роста бактерий составит 1000 особей в час.

Пример 3. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Если $\boldsymbol{x}$ обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции $\boldsymbol{y}$ описывается функцией $y = x^2(1-x)$. При каком значении $\boldsymbol{x}$ реакция максимальна?

Решение. Найдем производную $y' = \left(x^2 - x^3\right)' = 2x - 3x^2$.

Найдем критические точки: $2x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2-3x) = 0. \quad \Rightarrow$ Следовательно, имеем две критические точки: $x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{3}$. Значение $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Найдем вторую производную $y'' = \left(2x - 3x^2\right)' = 2 - 6x$. Вычислим значение второй производной при $x = \frac{2}{3}$. $y''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 6 \cdot \frac{2}{3} = -2 < 0$. Значит, $x = \frac{2}{3}$ – уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

Решение. Находим производную $f'(x) = \left(3x - x^3\right)' = 3 - 3x^2$; $3 - 3x^2 = 0$, то есть $x = \pm 1$ – критические точки. Определяем значения функции в этих точках: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Вычисляем значения данной функции на границах промежутка: $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее – 18. Можно записать ответ в виде:

$$\max_{[-2,3]} f(x) = f(1) = f(-2) = 2; \qquad \min_{[-2,3]} f(x) = f(3) = -18.$$

Пример 5. Исследовать функцию на экстремум $\boldsymbol{y = x^4 - 2x^2}$.

Решение.

1). Область определения функции – вся числовая ось;

2). Найдем производную функции: $y' = \left(x^4 - 2x^2\right)' = 4x^3 - 4x$. Найдем критические точки функции, решив уравнение $y' = 0$: $4x^3 - 4x = 0$. Следовательно $4x\left(x^2 - 1\right) = 0$: $x_1 = 0,\quad x_{2,3} = \pm 1$.

Определим интервалы возрастания и убывания:

– рассмотрим интервал $(-\infty;-1)$, определим знак производной в точке интервала $y'(-2) = -8 \cdot 3 = -24 < 0$ – на этом интервале функция убывает;

– рассмотрим интервал $(-1;0)$, найдем $y'(-0{,}5) = -2 \cdot (-0{,}75) = 1{,}5 > 0$

– на этом интервале функция возрастает;

– рассмотрим интервал $(0;1)$, найдем $y'(0{,}5)=2\cdot(-0{,}75)=-1{,}5<0$ – на этом интервале функция убывает;

– рассмотрим интервал $(1;+\infty)$, определим знак производной в точке интервала $y'(2)=8\cdot 3=24>0$ – на этом интервале функция возрастает;

Тогда точки $\boldsymbol{x=-1}$ и $\boldsymbol{x=1}$ – точки минимума, причем $y(-1)=y(1)=-1$, а точка $x=0$, $y(0)=0$ – точка максимума.

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти точки экстремума функций:

1. $y=2x^3-3x^2+15$;
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=3x^2-6x$ на отрезке $[0;3]$.
3. Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума и точки пересечения с осями: $y=2x^3-3x^2+1$.
4. Закон движения точки имеет вид $s(t)=t-sint$. Определить закон скорость и ускорение этой точки.
5. Уравнение движения точки имеет вид $s(t)=4+2t+t^2+0{,}21t^3$ (м).

Найти 1) положение точки в моменты времени $t_1=2$ с и $t_2=5$ с; 2) среднюю скорость за время, прошедшее между этими моментами времени; 3) мгновенные скорости в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения в указанные моменты времени.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ ОТВЕТ. ЕСЛИ ДЛЯ ЛЮБЫХ ДВУХ ТОЧЕК ДАННОГО ИНТЕРВАЛА ИЗ НЕРАВЕНСТВА $x_2>x_1$ СЛЕДУЕТ НЕРАВЕНСТВО $f(x_2)<f(x_1)$, ТО В КАЖДОЙ ТОЧКЕ ЭТОГО ИНТЕРВАЛА

1) $y'>0$

2) $y'<0$

3) $y'=0$

4) $y''>0$

5) $y''<0$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАЗБИВАЕТСЯ НА ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ

1) точками разрыва функции
2) нулями функции
3) критическими точками функции
4) точками перегиба функции
5) точками, в которых производная функции второго порядка равна нулю

3.УКАЖИТЕ ИНТЕРВАЛ ИЛИ ИНТЕРВАЛЫ, НА КОТОРЫХ ФУНКЦИЯ $y = -(x^2 - 4x)^3$ МОНОТОННО УБЫВАЕТ

1) (2; +∞)

2) (-∞; 2)

3) (-∞; 0) $\cup$ (2; 4)

4) (0; 2) $\cup$ (4; +∞)

5) (-∞; +∞)

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ *X* ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ X_0 ВЫПОЛНЯЕТСЯ НЕРАВЕНСТВО $f(x) > f(x_0)$, ТО В ТОЧКЕ X_0 ФУНКЦИЯ ИМЕЕТ

1) критическую точку
2) точку перегиба
3) точку локального максимума
4) точку локального минимума
5) нуль функции

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ТОЧКА X_0 ЯВЛЯЕТСЯ ТОЧКОЙ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА В ОДНОМ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ СЛУЧАЕВ

1) $f'(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0) > 0$

2) $f'(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0) < 0$

3) $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с «+» на «-»

4) $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с «-» на «+»

5) $f'(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0) = 0$

5. Задание на дом:

1. Подготовиться к практическому занятию «Нахождение частных

производных функции двух переменных».

2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

1. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$. **2.** $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

Занятие №6

Тема: Нахождение частных производных функции двух переменных

Цели: научиться находить частные производные функций нескольких переменных.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения производных функции одного и нескольких аргументов при решении прикладных задач.

Студент должен знать: понятие функции двух переменных; понятие частных производных функции двух переменных; понятие полного и частных дифференциалов функции нескольких переменных.

Студент должен уметь: находить производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

3. Функции нескольких аргументов.
4. Частные производные функции двух переменных.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Рассмотреть решение задач:

Пример.1. Найти частные производные функций:

3). $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$;

4). $z = e^{x^2+y^2}$.

Решение. 1) рассматривая y как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$, рассматривая x как постоянную величину, найдем: $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$.

2) пусть y – $const$, получим $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2}$,

пусть x – $const$, получим $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$.

Пример 2. Реакция на инъекцию x единиц лекарственного препарата описывается функцией $y = x^2(a-x) \cdot te^{-t}$, где t выражается в часах с момента инъекции, a – некоторая константа. Найти частные производные $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(x^2(a-x) \cdot te^{-t}\right)'_x = te^{-t} \cdot \left(x^2(a-x)\right)'_x = te^{-t}\left(2ax - 3x^2\right);$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\left(x^2(a-x)\cdot te^{-t}\right)'_t=x^2(a-x)\cdot\left(te^{-t}\right)'_t=x^2(a-x)(1-t)e^{-t}.$$

Пример 3. Для функции $z=y\,ln\,x$ найти производные второго порядка.

Решение. Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=ln\,x$.

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{-y}{x^2};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(ln\,x)=0;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

Пример 4. Найти полный дифференциал функций:

3). $z=\frac{x+y}{x-y}$;

4). $u=x^{y^2 z}$.

Решение. 1) Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2y}{(x-y)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2x}{(x-y)^2}.$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{-2ydx-2xdy}{(x-y)^2}$.

2) найдем частные производные по переменным *x, y* и *z*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z\cdot x^{y^2z-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\cdot ln\,x\cdot 2yz,\ \frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\cdot ln\,x\cdot y^2,$$

следовательно

$$du\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=y^2z\cdot x^{y^2z-1}dx+2yz\cdot x^{y^2z}\cdot ln\,xdy+y^2x^{y^2z}\cdot ln\,xdz$$

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти частные производные функций:

9. $z=x^2+xy+1$.

10. $z=-5x^2+2xy+y^2-ln\,x+y+6$.

11. $z = 2^{3x^2+2y^3}$.

12. $z = cos\left(x + y^2\right)$.

Найти все частные производные второго порядка функции:

13. $z = x^4 + 3x^3y - y^3$.

14. $z = x^2 + y^2 + 2x + 1$.

Найти частные и полный дифференциал для следующих функций:

15. $z = ln(x^2 + y^2)$.

16. $z = x^y$.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ФУНКЦИЕЙ *Z* ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ *X* И *У* НАЗЫВАЕТСЯ

6) Формула, представляющая собой аналитическое выражение с двумя переменными *x* и *y* для нахождения значений *z*
7) Зависимость переменной *z* от значений переменных *x* и *y*
8) Соответствие значений переменной *z* значениям переменных *x* и *y*
9) Закон, по которому определяются значения переменной *z* в зависимости от значений переменных *x* и *y*
10) Переменная *z*, если каждой паре чисел *(x, y)* соответствует определенное значение величины *z*

2. УКАЖИТЕ, КАКОЙ ТЕРМИН НЕ ПРИМЕНЯЕТСЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ МОЖЕТ БЫТЬ

6) Открытой
7) Незамкнутой
8) Конечной
9) Ограниченной
10) Неограниченной

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ *Z=LN(X+Y)*

6) Часть плоскости *xOy*, расположенная выше прямой *y=x,* точки прямой входят
7) Часть плоскости *xOy*, расположенная выше прямой *y=x,* точки прямой не входят

8) Часть плоскости *xOy*, расположенная выше прямой *y=-x,* точки прямой входят
9) Часть плоскости *xOy*, расположенная выше прямой *y=-x,* точки прямой не входят
10) Часть плоскости *xOy*, расположенная выше оси *Ox*, точки оси не входят

4. УКАЖИТЕ НЕВЕРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ. ФУНКЦИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ МОЖЕТ БЫТЬ ЗАДАНА

6) Словесным описанием
7) Таблично
8) Графически
9) Аналитически
10) Алгоритмически

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ ФУНКЦИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ $Z=F(X, Y)$ БЫЛА НЕПРЕРЫВНА В ТОЧКЕ $M(X_0, У_0)$ НЕОБХОДИМО, ЧТОБЫ

6) Функция была определена во всех точках некоторой окрестности точки М
7) Функция была определена в точке М
8) Функция была не равна нулю в точке М
9) Существовал предел функции при $x \to x_0$, $y \to y_0$
10) Предел функции при $x \to x_0$, $y \to y_0$ был равен значению функции в точке М

4. Подведение итогов занятия: Преподаватель кратко анализирует занятие и дает критическую оценку каждого его этапа, обращает внимание на хорошие результаты и на допущенные ошибки, выделяет лучшие работы и указывает на отставание, недостаточную подготовленность к занятию.

5. Задание на дом.

2. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление интеграла методом непосредственного интегрирования».
3. а. Дана функция $z = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$. Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

б. Дана функция $z = x\ln\frac{y}{x}$. Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Занятие № 7

<u>Тема:</u> Вычисление интеграла методом непосредственного интегрирования

<u>Цель:</u> научиться вычислять неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения простейших интегралов.

Студент должен знать: понятие первообразной функции, определение неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла; свойства интеграла; сущность методов интегрирования.

Студент должен уметь: применять основные формулы интегрирования при нахождении интегралов методом непосредственного интегрирования; использовать свойство инвариантности неопределенного интеграла, применять методы интегрирования.

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Первообразная, правила нахождения первообразных.
2. Неопределенный интеграл.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Метод непосредственного интегрирования.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Найти интегралы:

1) $\int\left(\frac{5x^2+2}{x}+3\right)dx$.

Решение. 1) Применяя свойства 4 и 5 неопределенного интеграла, а также алгебраические преобразования сведем интеграл к трем табличным интегралам:

$$\int\left(\frac{5x^2+2}{x}+3\right)dx=\int\left(5x+\frac{2}{x}+3\right)dx=\int 5xdx+\int\frac{2}{x}dx+\int 3dx=$$

$$=5\int xdx+2\int\frac{1}{x}dx+3\int dx=5\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+3x+C;$$

Пример 2. **Найти интегралы:**

1) $\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx$.

2) $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2dx$.

Решение: **1)** Применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx=2\int x^3dx-5\int x^2dx+7\int xdx-3\int dx=\frac{2x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-3x+C$$

2) Воспользуемся формулой сокращенного умножения для преобразования подынтегральной функции и применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx=\int\left(x+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}})dx=$$

$$=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\cdot\sqrt[6]{x}+3\cdot\sqrt[3]{x}+C.$$

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти интегралы

1. $\int\frac{6x^3-8x+5}{x^2}dx.$
2. $\int\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$
3. $\int tgxdx$**.**
4. $\int(x^4+4^x)dx.$
5. $\int\frac{x^3-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx.$
6. $\int\frac{sin2x}{sinx}dx.$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ, КАКИМ ИЗ СВОЙСТВ НЕ ОБЛАДАЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1) $\int C\cdot f(x)dx=C\cdot\int f(x)dx$

2) $\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$

3) $\int(f_1(x)\cdot f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\cdot\int f_2(x)dx$

4) $\int dx=x+C$

5) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

2. УКАЖИТЕ, ЗНАЧЕНИЕМ КАКОГО ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЯ $\ln|\sin x| + C$

1) $\int \frac{dx}{\sin x}$

2) $\int \frac{dx}{\cos x}$

3) $\int tgx \cdot dx$

4) $\int ctgx \cdot dx$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int x^a dx$

1) $x^a \cdot \ln a + C$

2) $\frac{x^a}{\ln a} + C$

3) $a \cdot \ln|x| + C$

4) $a \cdot x^{a-1} + C$

5) $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

4. УКАЖИТЕ, ПЕРВООБРАЗНОЙ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КАКОГО ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЯ $\arcsin\frac{u}{a}$

1) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}}$

2) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$

3) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du$

4) $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$

5) $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ПОДВЕДЕНИЕ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА. ДИФФЕРЕНЦИАЛ $d(ax^2+b)$ РАВЕН

1) $a \cdot dx$

2) $x \cdot dx$

3) $ax \cdot dx$

4) $2ax \cdot dx$

5) $\frac{1}{a} dx$

5. Задание на дом:

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление интеграла методом подстановки».
2. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{8x^4+5}{x} dx$	2. $\int \frac{9x^2-5x}{x} dx$	3. $\int \frac{9x^6-x^3}{x} dx$
4. $\int \frac{8x^8+5}{x^3} dx$	5. $\int (6x^2+7\cos x)dx$	6. $\int (6x^5+7\sin x)dx$
7. $\int (15x^9-7\cos x)dx$	8. $\int (x^8+8\sin x)dx$	9. $\int \sqrt{x^5} dx$
10. $\int \sqrt[5]{x^2} dx$	11. $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} dx$	12. $\int \sqrt[7]{x^9} dx$

Занятие №8

Тема: Вычисление интеграла методом подстановки

Цели: научиться вычислять неопределенный интеграл методом подстановки.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения простейших интегралов.

Студент должен знать: понятие первообразной функции, определение неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла; свойства интеграла; сущность методов интегрирования.

Студент должен уметь: применять основные формулы интегрирования при нахождении интегралов методом непосредственного интегрирования; использовать свойство инвариантности неопределенного интеграла, применять методы интегрирования.

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

5. Неопределенный интеграл.
6. Свойства неопределенного интеграла.
7. Основные способы интегрирования.
8. Метод подстановки (замены переменной интегрирования).

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия*

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	Средства действия	Критерии самоконтроля
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Найти интегралы:

1) $\int e^{\frac{x}{4}}dx$. 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. 1) Введем замену: пусть $x=4t$, тогда $dx=d(4t)=4dt$. Следовательно, можем записать:

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx=\int e^{t}4dt=4\int e^{t}dt=4e^{t}+C=4e^{\frac{x}{4}}+C.$$

2) Положим $t=1+x^2$. Тогда $dt=d\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)'dx=2xdx$, следовательно $dx=\frac{1}{2}dt$. Можем записать:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{x\frac{1}{2x}dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C=\sqrt{1+x^2}+C$$

Пример 3. Найти интегралы:

1) $\int(2x+1)^{20}dx$.

2) $\int x^2\sqrt{x^3+5}\ dx$;

Решение:

1) Этот интеграл можно найти с помощью замены переменной. Полагая $2x+1=t$, имеем $2dx=dt$, т.е. $dx=(1/2)dt$. Отсюда получим

$$\int(2x+1)^{20}dx=\frac{1}{2}\int t^{20}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21}+C=\frac{1}{42}(2x+1)^{21}+C.$$

2) Введем подстановку: $x^3+5=t,\quad 3x^2dx=dt\ \Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{3}$

$$\int\frac{1}{3}\sqrt{t}dt=\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C=\frac{2}{9}(x^3+5)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(x^3+5)(\sqrt{x^3+5})+C$$

Примерные задания для самостоятельного решения

Найти интегралы

7.	$\int\sin 8xdx$
8.	$\int 9^{2x+11}dx$

9. $\int \frac{9dx}{(1-5x)^4}$
10. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
11. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^5 x}$
12. $\int \frac{xdx}{7-x^2}$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \frac{dx}{tg^3 x \cdot \cos^2 x}$

1) $-\frac{1}{2 \cdot tg^2 x} + C$

2) $\frac{1}{4} tg^4 x + C$

3) $\ln | tgx | + C$

4) $\ln | tg^3 x | + C$

5) $\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНУЮ ЗАМЕНУ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$

1) $\sqrt{x^4+1} = t; \quad \frac{2x^3 dx}{\sqrt{x^4+1}} = dt$

2) $x^4 + 1 = t^2; \quad x^3 dx = \frac{1}{2} tdt$

3) $x^4 + 1 = t^4; \quad x^3 dx = t^3 dt$

4) $x^4 = t^2; \quad x^3 dx = \frac{1}{2} tdt$

5) $x^2 = t;\quad xdx = \frac{1}{2}dt$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \cos 4x \cdot dx$

1) $\sin 4x + C$

2) $-\sin 4x + C$

3) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$

4) $4\sin 4x + C$

5) $-4\sin 4x + C$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНЫЙ МЕТОД ВЗЯТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

6) Метод интегрирования по частям: $\ln x = u;\quad x \cdot dx = dv$

7) Метод интегрирования по частям: $\ln x = u;\quad \frac{dx}{x} = dv$

8) Метод интегрирования по частям: $\frac{1}{\ln x} = u;\quad \frac{dx}{x} = dv$

9) Метод интегрирования по частям: $\frac{1}{x} = u;\quad \frac{dx}{\ln x} = dv$

10) Метод интегрирования подстановкой: $\ln x = u;\quad \frac{dx}{x} = du$

5. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. СОГЛАСНО ПЕРВОЙ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕКОМЕНДАЦИИ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ ЗА *U* ПРИНИМАЕТСЯ ФУНКЦИЯ

1) *lnx*

2) *arcsinx*

3) e^x

4) *arccosx*

5) *arctgx*

Ответы:1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 5; 5) 3

5. Задание на дом.

2. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление определенного интеграла».
3. Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \sin 5x dx$
8. $\int 4^{2x-1} dx$
9. $\int \frac{dx}{(1+2x)^2}$
10. $\int \frac{7dx}{(4x-3)^4}$
11. $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$
12. $\int \frac{xdx}{x^2+28}$

Занятие № 9

Тема: **Вычисление определенного интеграла**
Цель: научиться вычислять определенные интегралы.

Студент должен иметь практический опыт: владения простейшими методами интегрирования.

Студент должен знать: понятие определенного интеграла, свойства определенного интеграл, формулу Ньютона-Лейбница, определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Студент должен уметь: вычислять определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница; применять методы интегрирования для вычисления определенного интеграла, решения прикладных задач.

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний: контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Определенный интеграл.

2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия

3. Практическая часть:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1.Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 2x^3dx;$$

Решение: Найдем первообразную для функции $f(x)=2x^3$: $F(x)=2\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{2}+C$. Для того, чтобы воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница возьмем первообразную для которой $C=0$. Тогда

$$\int_0^1 2x^3dx=\left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1=\frac{1^4}{2}-\frac{0^4}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_1^2 x^2\left(3-x^3\right)^4dx,$$

Решение: Применим метод подстановки. Пусть $t=3-x^3$. Тогда

$$dt = d\left(3 - x^3\right) = \left(3 - x^3\right)' dx = -3x^2 dx$$ и $$x^2 dx = -\frac{dt}{3}.$$ Найдем новые пределы интегрирования: $t_B = 3 - 2^3 = -5, \quad t_H = 3 - 1^3 = 2$. Следовательно,

$$\int_1^2 x^2\left(3 - x^3\right)^4 dx = \int_2^{-5} t^4\left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3}\int_2^{-5} t^4 dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5}\Bigg|_2^{-5} = -\frac{1}{15}\left((-5)^5 - 2^5\right) =$$
$$= -\frac{1}{15}\cdot\left(-3125 - 32\right) = \frac{3157}{15}.$$

б) самостоятельная работа студентов

Примерные задания для самостоятельного решения

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^1 2x^3 dx$.
2. $\int_1^2 2^{x-4} dx$.
3. $\int_1^2 x^2\left(3 - x^3\right)^4 dx$.
4. $.\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.
5. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.
6. $\int_0^\pi \sin x dx$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме (ситуационные задачи):

1. УКАЖИТЕ, КАКОЕ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ СВОЙСТВ ОТНОСИТСЯ КАК К ОПРЕДЕЛЕННОМУ, ТАК И К НЕОПРЕДЕЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ

1) Если на интервале *[a, b]* *f(x)>0*, то и $\int_a^b f(x)dx > 0$.

2) Если на интервале *[a, b]* *f(x)>φ(x)*, то и $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b \varphi(x)dx$.

3) Если на интервале *[a, b]* *f(x)* непрерывна, то $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$.

4) Если на интервале *[a, b]* *f(x)* непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx$.

5) Если на интервале *[a, b]* *f(x)* непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. УКАЖИТЕ, КАКАЯ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ФОРМУЛ ЯВЛЯЕТСЯ ФОРМУЛОЙ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$
2) $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
3) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$, где $c \in [a,b]$
4) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$
5) $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$

3. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА ПОЗВОЛЯЕТ

1) вычислить предел интегральной суммы на заданном интервале
2) вычислить неопределенный интеграл на заданном интервале
3) установить связь между определенным интегралом как пределом интегральной суммы и неопределенным интегралом как результатом операции, обратной дифференцированию
4) вычислить площадь криволинейной трапеции, если функция на заданном интервале положительна
5) вычислить приращение функции на заданном интервале

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА $\int_2^4 \frac{dx}{x^3}$

1) $\frac{1}{16}$
2) $-\frac{1}{16}$
3) $\frac{1}{8}$
4) $-\frac{1}{8}$
5) $\frac{7}{256}$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНУЮ ФОРМУЛУ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1) $\int_a^b f(x)dx = uv - \int vdu$
2) $\int_a^b f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$
3) $\int_a^b f(x)dx = uv - \int_a^b vdu$
4) $\int_a^b f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int vdu$
5) $\int f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

5. Задание на дом:

1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление площадей с помощью интегралов».
2. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^3 2xdx$
2. $\int_0^2 (x^2 + e^x)dx$
3. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$
4. $\int_2^5 \sqrt{x-1}dx$

5. $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$

Занятие №10

Тема: Вычисление площадей с помощью интегралов
Цели: освоить методы вычисления определенного интеграла.

Студент должен иметь практический опыт: владения простейшими методами интегрирования.

Студент должен знать: понятие определенного интеграла, свойства определенного интеграл, формулу Ньютона-Лейбница, определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Студент должен уметь: вычислять определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница; применять методы интегрирования для вычисления определенного интеграла, решения прикладных задач.

Ход занятия

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Задача о криволинейной трапеции.
2. Вычисление площади криволинейной трапеции.
3. Применение интеграла к решению практических задач.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	Средства действия	Критерии самоконтроля
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш,	Проверка решения

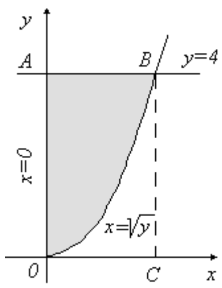
Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{y}, \quad x=0, \quad y=4$.

Решение: Сделаем чертеж. Из чертежа (рис. 6.2) видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей: $\boldsymbol{S = S_{OABC} - S_{OBC}}$, каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла.



Решим систему $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$. Получаем, что точка B пересечения прямой $\boldsymbol{y=4}$ и кривой $\boldsymbol{x=\sqrt{y}}$ имеет координаты (2; 4). Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4dx = 4\int_0^2 dx = 4x\Big|_0^2 = 8,$$

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Окончательно $S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}(кв.\ ед.)$

Отметим, что данная задача может быть также решена другим способом. В данном случае площадь вычисляется посредством проецирования криволинейной трапеции на ось ординат. Пределы интегрирования найдены как ординаты точек пересечения данных линий. Тогда

$$S = \int_0^4 \sqrt{y}dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{16}{3}(кв.\ ед.).$$

П р и м е р 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на *0,05 м*, если сила *100 Н* растягивает пружину на *0,01 м*?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению *x,* т. е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ *Н* растягивает пружину на $x = 0{,}01$ *м*; следовательно, $100 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа равна $A = \int_0^{0,05} 10000xdx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12{,}5\ (Дж).$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить площади фигур ограниченных линиями:

1. *y= cos x и осью Ox, в пределах от 0 до* $\frac{\pi}{2}$.
2. $y=x^2$, $y=|x|$.
3. Вычислить работу, произведенную при сжатии пружины на 0,03 м, если известно, что для укорочения ее на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н .
4. Скорость движения тела $v=3t^2-2t$ (*м/с*). Какой путь пройдет тело за 5 с от начала движения?

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением программы Veral Test или бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНО ЗАПИСАННУЮ ФОРМУЛУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1) $S=\int_a^b f(x)dx$
2) $S=\int_c^d \varphi(y)dy$
3) $S=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx$
4) $S=\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]dx$
5) $S=\int_a^c [f(x)-\varphi(x)]dx+\int_c^b [\varphi(x)-f(x)]dx$

2. УКАЖИТЕ ФОРМУЛУ, ПО КОТОРОЙ НЕЛЬЗЯ ВЫЧИСЛИТЬ ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ

1) $S=\int_a^b f(x)dx$
2) $S=\int_c^d \varphi(y)dy$
3) $S=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$
4) $S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$
5) $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВЫМИ $У=2^X$ И $У=2^{-X}$ НА ИНТЕРВАЛЕ [-1; 1]

1) ln2
2) -ln2
3) 0
4) 7ln2
5) -7ln2

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЙ $r=sin\varphi$ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1) π
2) π^2
3) $\frac{\pi}{2}$
4) 2π
5) $\frac{\pi^2}{2}$

5. УКАЖИТЕ, ПО КАКОЙ ИЗ ФОРМУЛ НЕЛЬЗЯ ВЫЧИСЛИТЬ ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

1) $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$, вокруг оси абсцисс
2) $V=\pi\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$, в полярной системе координат
3) $V=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)dt$, вокруг оси абсцисс
4) $V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$, вокруг оси ординат
5) $V=\pi\int_\gamma^\delta \varphi^2(t)\psi'(t)dt$, вокруг оси ординат

5. **Задание на дом.**

Вопросы для самоподготовки:

2. Подготовиться к контрольной работе по теме «Дифференциальное и интегральное исчисление».
3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

1. $y=6x-x^2$ *и осью OX* *2.* $y=\frac{1}{2}x^2+2,y=0,x=1,x=3$

Занятие №11

<u>Тема:</u> Контрольная работа по теме «Дифференциальное и интегральное исчисление»

<u>Цели:</u> определение качества знаний.

Студент должен иметь практический опыт: решения типовых задач.

Студент должен знать: основные определения и формулировки теорем, методику решения задач.

Студент должен уметь: решать примеры и задачи пройденных разделов.

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие функции
2. Таблица производных
3. Таблица интегралов
4. Правила интегрирования

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	Средства действия	Критерии самоконтроля
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш, линейка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Задания для самостоятельного решения

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2-3}{3x^2+x+4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+1}{x^2+8x+7}$, **в)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-2x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{3x^2+x+1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$, **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-x^3+2}{6x^4-2x^2+3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$, **в)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{3x^2-11x-4}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-4x^3}{1+x^2+8x^3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, **в)** $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{4+x}{\sqrt{1-6x}-5}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x-x^2}{4x^2+3x-1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$, **в)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x+5x^3}{2+x^2-x^3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+1}-1}$, **в)** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2+13x+3}{x^2+x-6}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+4x-3}{5x^2+3x+4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$, **в)** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-4x+2}{3-2x+5x^2}$, **б)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x}$, **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{7x^2+x-2}$, **б)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, **в)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{3x-3}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-7x^2}{3x^2-4x+5}$, **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{4-x^2}$, **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Задание №2. Найти производные следующих функций:

1. $a) y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2}$; $\quad б) y = \left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)$; $\quad в) x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t$

2. $a) y = 2^{\sqrt{x}}$; $\quad б) y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$; $\quad в) x = \ln(1+t^2), \quad y = t^2$

3. $a) y = x^3 \cdot e^{3x}$; $\quad б) y = \sqrt[3]{1+\ln^2 x}$; $\quad в) x = 1-\cos 2t, \quad y = 2+\sin 2t$

4. $a) y = \sqrt{1+e^x}$; $\quad б) y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$; $\quad в) x = \dfrac{1}{2}t^2, \quad y = \dfrac{1}{2}t^3 + t$

5. $a) y = e^{2x} \cdot \sin x$; $\quad б) y = \operatorname{arctg}^3 x$; $\quad в) x = \dfrac{1}{t}, \quad y = \dfrac{t-1}{t}$

6. $a) y = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $\quad б) y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $\quad в) x = \ln(\cos t), \quad y = \sin^2 t$

7. $a) y = e^x \cos 3x$; $\quad б) y = \ln^2(x^3+1)$; $\quad в) x = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + 1, \quad y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t}$

8. $a) y = x^2 \ln(x^2+1)$; $\quad б) y = \sqrt[4]{\operatorname{tg} 2x}$; $\quad в) x = e^{t^2}, \quad y = t \cdot e^{t^2}$

9. $a) y = (x+1) \cdot \sqrt{x^2+1}$; $\quad б) y = e^{\sin^2 x}$; $\quad в) x = \ln t, \quad y = t + \dfrac{1}{t}$

10. $a) y = \cos 2x - \dfrac{1}{3}\cos^3 2x$; $б) y = (x^2+4) \cdot e^{-x^2}$; $в) x = \dfrac{1}{2}t^2 + t, \quad y = \dfrac{1}{3}t^3 - t$

Задание №3. Найти интегралы:

1. $a) \int x(x+1)(x+2)dx$; $\quad б) \int \dfrac{xdx}{x^2-5}$; $\quad в) x\cos 3x dx$; $\quad г) \int \dfrac{dx}{2x^2-5x+7}$.

2. $a) \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; $\quad б) \int \dfrac{3x^2dx}{1+x^6}$; $\quad в) \int x \cdot 2^{-x} dx$; $\quad г) \int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$.

3. $a) \int \dfrac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}dx$; $\quad б) \int \dfrac{dx}{\sqrt{5x-2}}$; $\quad в) \int x^3 \ln x dx$; $\quad г) \int \dfrac{xdx}{1+2x}$.

4. $a) \int (1-\sqrt[3]{x^2})^3 dx$; $\quad б) \int \dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$; $\quad в) \int x^2 \ln x dx$; $\quad г) \int \dfrac{1-3x}{3+2x}dx$.

5. $а)\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;\quad б)\int x7^{x^2}dx;\quad в)\int \arccos 2x dx;\quad г)\int\frac{xdx}{2+x}.$

6. $а)\int\frac{x^2-2}{\sqrt[3]{x^2}}dx;\quad б)\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1};\quad в)\int \mathrm{arctg}\,2xdx;\quad г)\int\frac{dx}{x^2+2x}.$

7. $а)\int(1+2x^3)^2dx;\quad б)\int\frac{xdx}{2x^2+3};\quad в)\int\frac{xdx}{e^x};\quad г)\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}.$

8. $а)\int\frac{(1+x)^2}{x\sqrt{x}}dx;\quad б)\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}};\quad в)\int xe^{-2x}dx;\quad г)\int\frac{x-1}{2x+1}dx.$

9. $а)\int\frac{(x-x^2)^2}{\sqrt{x}}dx;\quad б)\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};\quad в)\int x\sin x\cos xdx;\quad г)\int\frac{dx}{3x^2-x+1}.$

10. $а)\int 2^xe^xdx;\quad б)\int\frac{\mathrm{arctg}(x/2)}{4+x^2}dx;\quad в)\int x\sin 3xdx;\quad г)\int\frac{2x+3}{2x+1}dx.$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением программы Veral Test или бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

5. Задание на дом.

Подготовиться к практическому занятию «Вероятность случайного события».

Занятие №12

<u>Тема:</u> Вероятность случайного события

<u>Цели:</u> закрепить основные понятия теории вероятностей.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения вероятностей событий.

Студент должен знать: понятия случайного события, классификацию случайных событий, определение полной группы событий; классическое и статистическое определения вероятности, свойства вероятности.

Студент должен уметь: решать задачи на вычисление вероятностей событий.

<u>Ход занятия</u>

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

1) Проверка исходного уровня знаний**:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

2. Случайные события.
3. Классификация случайных событий.
4. Классическое определение вероятности.
5. Статистическое определение вероятности.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**

Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

а) подготовка студентов к самостоятельной работе **(*проведение инструктажа по выполнению заданий и манипуляций).***

Пример 1. В ящике 8 пронумерованных шаров с номерами № 1, № 2, ..., № 8. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 8?

Решение. Пусть событие А - вынули шар с номером не больше 8. Данное событие достоверное, следовательно, вероятность Р(А)=1.

Пример 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка,..., шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Таким образом, общее число возможных элементарных исходов испытания равно $6 \cdot 6=36$.

Эти исходы единственно возможны, и, в силу симметрии костей, равновозможные.

Благоприятствующими интересующему нас событию являются следующие пять исходов:

1) 6, 2; 6+2=8,
2) 6, 4; 6+4=10,
3) 6, 6; 6+6=12,
4) 2, 6; 2+6=8,
5) 4, 6; 4+6= 10.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов: $P(A)=\frac{5}{36}$.

Задания для самостоятельного решения

1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами № 1, № 2, ..., № 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

2. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

3. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар

4. В урне 20 шаров с номерами № 1, № 2, № 3, ... № 20. Какова вероятность вынуть шар с № 37?

5. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета – выигрыш по 60 руб., на десять билетов – выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов – выигрыш по 10 руб., на 165 билетов – выигрыш по 5 руб., на 400 билетов – выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не меньше 10 руб.?

6. Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадает орел?

7. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

8. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей? Чему равна относительная частота появления нестандартной детали?

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением программы Veral Test или бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

6. Задание на дом.

Подготовиться к практическому занятию «Теоремы сложения и умножения, вероятность появления хотя бы одного события».

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну последнюю цифру. Найти вероятность того, что абонент набрал правильный номер.

2. По данным автопредприятия на 1000 рейсов автобусов в 50 случаются поломки. Найти вероятность поломки одного автобуса.

3. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

4. В лотерее разыгрываются 100 билетов с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного билета не содержит цифры два.

Занятие №13

<u>Тема:</u> Теоремы сложения и умножения, вероятность появления хотя бы одного события

<u>Цели:</u> научиться применять теоремы сложения и умножения вероятностей при решении задач.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения вероятностей событий.

Студент должен знать: формулировки теоремы сложения для несовместных событий; следствий из теоремы сложения; теоремы умножения; формулы полной вероятности; формулу Бернулли и Пуассона.

Студент должен уметь: решать задачи на вычисление вероятности событий, вычислять характеристики распределения дискретной случайной величины.

<u>Ход занятия</u>

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

5. Теоремы сложения для несовместных событий.
6. Следствий из теоремы сложения.
7. Теоремы умножения.
8. Условная вероятность.
7. Вероятность появления хотя бы одного события.

***2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы** планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка, карандаш,	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

1. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый? черный? синий? красный? белый или черный? синий или красный? белый, черный или синий?

Решение. Имеем

$n=10+15+20+25=70,$ тогда

$$P(Б)=\frac{10}{70}=\frac{1}{7},\ P(Ч)=\frac{15}{70}=\frac{3}{14},\ P(С)=\frac{20}{70}=\frac{2}{7},\ P(К)=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$$

Применяем теорему сложения вероятностей:

Р(Б+Ч)=Р(Б)+Р(Ч)=5/14; Р(С+К)=Р(С)+Р(К)=9/14; Р(Б+Ч+С)=1–Р(К)=9/14.

2. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что, оба шара белые?

Решение. В данном случае речь идет о совмещении событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, где событие $\boldsymbol{A}$ – появление белого шара из первого ящика, событие $\boldsymbol{B}$ – появление белого шара из второго ящика. При этом $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – независимые события. Имеем: $P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Применяем теорему умножения вероятностей для независимых событий: $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$.

3. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой черный.

Решение.

Событие $\boldsymbol{A}$ – появление белого шара из первого ящика,
» $\boldsymbol{B}$ – » » » » второго »,
» $\boldsymbol{C}$ – » черного » » первого » ($C=\overline{A}$),
» $\boldsymbol{D}$ – » » » » второго » ($D=\overline{B}$).

$P(A)=1/6$, $P(B)=2/3$, $P(C)=P(\overline{A})=1-1/6$, $P(D)=P(\overline{B})=1-2/3=1/3$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – черный ***P(AD)=P(A) ·P(D)=1/6·1/3 =1/18.***

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика – белый: ***P(BC)=P(B) · P(C)=2/3·5/6=5/9***.

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично из первого или второго), будет белым, а шар, вынутый из другого ящика, – черным. Применяем теорему сложения вероятностей ***P=P(AD)+P(BC)=11/18.***

Задания для самостоятельного решения

1. В коробке 10 упаковок аспирина, 5 упаковок анальгина, 2 упаковки цитрамона. Все упаковки одинаковы по форме и размеру. Наугад вынули одну упаковку таблеток. Какова вероятность того, что вынули цитрамон или аспирин?

2. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые. *Ответ*: 15/91.

3. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить

вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель. *Ответ*: 0,54

4. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того что “орёл” выпадет: а) менее двух раз б) не менее двух раз. *Ответ*. а) $P = P_5(0) + P_5(1) = 3/16$, б) $Q = 1 - \left[P_5(0) + P_5(1)\right] = 13/16.$

5.Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени Т равна 0,002. Найти вероятность того, что за время Т откажут ровно 3 элемента. (Указание: Принять $e^{-2} = 0{,}13534.$) *Ответ*. $P_{1000}(3) = 0{,}18.$

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ В РЕЗУЛЬТАТЕ НЕКОТОРОГО ИСПЫТАНИЯ МОГУТ ПРОИЗОЙТИ ДВА СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЯ: СОБЫТИЕ А С ВЕРОЯТНОСТЬЮ Р(А) И СОБЫТИЕ В С ВЕРОЯТНОСТЬЮ Р(В), ТО

6) Р(А или В) = Р(А) + Р(В)
7) Р(А или В) = Р(А) + Р(В) + Р(А)·Р(В)
8) Р(А или В) = Р(А) + Р(В) - Р(А)·Р(В)
9) Р(А или В) = Р(А) · Р(В)
10) Р(А или В) = Р(А) · Р(В) – Р(А) – Р(В)

2. УКАЖИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ХОТЯ БЫ ОДИН ИЗ ДВУХ СТРЕЛКОВ ПОПАДЕТ В ЦЕЛЬ, ЕСЛИ ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОМАХНУТЬСЯ У ПЕРВОГО СТРЕЛКА 1/5, А У ВТОРОГО СТРЕЛКА – 1/6

6) 1/3
7) 29/30
8) 2/3
9) 11/30
10) 1/15

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СОБЫТИЕ А НАЗЫВАЕТСЯ ЗАВИСИМЫМ ОТ СОБЫТИЯ В, ЕСЛИ

6) Наступление события В исключает возможность наступления события А
7) Наступление события В влечет за собой наступление события А

8) Событие А может произойти только при условии, что произошло событие В
9) Кроме событий А и В никакого другого события произойти не может
10) Вероятность наступления события А зависит от того, произошло или не произошло событие В

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ФОРМУЛОЙ БЕЙЕСА НАЗЫВАЕТСЯ ФОРМУЛА

6) $P(A\cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$
7) $P(A\cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$
8) $P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(\overline{B}) \cdot P(A/\overline{B})$
9) $P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$
10) $P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$

5. УКАЖИТЕ, КАКАЯ ИЗ ФОРМУЛ НАЗЫВАЕТСЯ ФОРМУЛОЙ БЕРНУЛЛИ

6) $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$
7) $P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$
8) $P_n(m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$
9) $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где $C_n^m \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, $q = 1 - p$
10) $P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda = n \cdot p$

9. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

4. Дискретная случайная величина.
5. Закон распределения дискретной случайной величины.
6. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

1. Два студента независимо один от другого должны определить концентрацию сахара в биологической жидкости с помощью рефрактометра. На выполнение этого задания каждый из них получил по одному допуску. Вероятность провести исследование у первого студента равна 0,8, для второго - 0,4. Преподаватель зарегистрировал один приход. Найти вероятность того, что исследование провел первый студент. Ответ: 6/7.

2. Студент Петров знает не все экзаменационные билеты. Что для него выгоднее: отвечать первым или вторым? Число билетов 30, из них Петров знает 25.

3. Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в 6 пробах данная колония микроорганизмов появится четыре раза.

Занятие №14

Тема: Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины

Цели: научиться вычислять числовые характеристики дискретных случайных величин.

Студент должен иметь практический опыт: нахождения числовых характеристик с.в.

Студент должен знать: определение случайной величины, дискретной и непрерывной случайной величины; определения характеристик распределения.

Студент должен уметь: решать задачи на вычисление характеристик распределения дискретной случайной величины.

Ход занятия

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Дискретная случайная величина.
2. Закон распределения дискретной случайной величины.

3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

Пример 1. Пусть в некоторой лотерее разыгрываются 10000 билетов. Один билет имеет выигрыш 10000 рублей, два билета – по 3000 рублей, 10 – по 500 рублей и 50 по 10 рублей. Установить закон распределения случайного выигрыша для владельца одного билета.

Решение. Определим возможные значения для случайной величины X:

$x_1=10000; \quad x_2=3000; \quad x_3=500; \quad x_4=100; \quad x_5=0.$

Найдем вероятности их появления: $p_1 = 0{,}0001; \quad p_2 = 0{,}0002;$

$$p_3 = 0{,}001; \quad p_4 = 0{,}005; \quad p_5 = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 - 0{,}0063 = 0{,}9937$$

Запишем закон распределения:

x_i	10000	3000	500	50	0
p_i	0,0001	0,0002	0,001	0,005	0,9937

Пример 2. В задаче по лотерею определить средний выигрыш для владельца одного билета.

Решение. Средний выигрыш подсчитывается как математическое ожидание и равен: $M(x) = \sum x_i p_i$

$$M(x) = 10000 \cdot 0{,}0001 + 3000 \cdot 0{,}0002 + 500 \cdot 0{,}001 + 50 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}9937 = 2{,}35$$

Пример 3. Закон распределения задан таблицей:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Для вычисления характеристик распределения удобно пользоваться таблицей:

	x_i	p_i	$x_i\,p_i$	M-x_i	$(M$-$x_i)^2$	$(M$-$x_i)^2 p_i$
	1	0,2	0,2	1,3	1,69	0,338
	2	0,4	0,8	0,3	0,09	0,036
	3	0,3	0,9	-0,7	0,49	0,147
	4	0,1	0,4	-1,7	2,89	0,289
Σ			2,3			0,81

Итак, математическое ожидание $M(x) = \sum x_i p_i = 2{,}35$;

дисперсия $D(x) = \sum (M - x_i)^2 p_i = 0{,}81$;

среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.

Задания для самостоятельного решения

1. События *A*, *B*, *C* и *D* образуют полную группу с одинаковыми вероятностями. Найти вероятности этих событий.

2. Дано распределение числа очков полученных стрелком при одном выстреле по мишени с шестью областями:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2

Найти: а) характеристики распределения;

б) вычислить вероятность того, что в результате одного выстрела стрелок попадет в область 3, или 4, или 5;

в) вычислить вероятность того, что в результате одного выстрела стрелок не промахнется.

3. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	1	3	6	8
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти характеристики распределения.

4. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрываются один выигрыш в 1000 руб., четыре по 500 руб., пять по 400 руб. и десять выигрышей по 100 руб. Установить закон распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

4. **Итоговый контроль:** Проводится в виде тестирования знаний студентов (бланкового тестирования)(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ЕСЛИ ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ЗНАЧЕНИЕ X_I С ВЕРОЯТНОСТЬЮ P_I , ГДЕ I = 1, 2, …, N , ТО ЗАКОНОМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НАЗЫВАЕТСЯ

6) Статистическая зависимость p_i от x_i
7) Корреляционная зависимость p_i от x_i
8) Эмпирическая зависимость p_i от x_i
9) Функциональная зависимость x_i от p_i
10) Функциональная зависимость p_i от x_i

2. УКАЖИТЕ ОШИБОЧНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ МОЖЕТ БЫТЬ ЗАДАН

6) Таблично
7) Интегральной функцией распределения
8) Дифференциальной функцией распределения
9) Эмпирической функцией распределения
10) Многоугольником распределения вероятностей (графически)

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ КАЖДОМУ ЗНАЧЕНИЮ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СООТВЕТСТВУЕТ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ПРИМЕТ ИМЕННО ЭТО ЗНАЧЕНИЕ, ВЫЧИСЛЕННАЯ ПО ФОРМУЛЕ БЕРНУЛЛИ, НАЗЫВАЕТСЯ

6) Равномерным
7) Нормальным
8) Биномиальным
9) Показательным
10) Пуассона

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НАИВЕРОЯТНЕЙШЕГО ЧИСЛА НАСТУПЛЕНИЙ СОБЫТИЯ А В СЕРИИ ИЗ 10 ИСПЫТАНИЙ, ЕСЛИ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СОБЫТИЕ А НАСТУПИТ В КАЖДОМ ОТДЕЛЬНОМ ИСПЫТАНИИ РАВНА 0,7

6) 10
7) 7
8) 5
9) 3
10) 0

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СУММА ПРОИЗВЕДЕНИЙ КВАДРАТОВ ОТКЛОНЕНИЙ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТ ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НА СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ВЕРОЯТНОСТИ НАЗЫВАЕТСЯ

6) Математическим ожиданием
7) Дисперсией
8) Средним квадратическим отклонением
9) Начальным моментом второго порядка
10) Центральным моментом первого порядка

5. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

1. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие А, вероятность которого равна Р. Рассматривается случайная величина X - число появления события А. Определить ее характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение (с.к.о.).
2. Медсестра обслуживает 4 больных. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания медсестры первый больной равна 0,9, второй-0,8, третий - 0,75, четвертый - 0,7. Определить математическое ожидание, диспеп-сию и с.к.о. числа больных, которые не потребуют внимания медсестры в течение часа.
3. Лекция по теме «Полигон и гистограмма. Мода и медиана»

Занятие №15

Тема: **Построение полигона и гистограммы статистических распределений, определение медианы и моды**

Цели: познакомиться с основными понятиями математической статистики.

Студент должен иметь практический опыт: построения полигонов и гистограмм**.**

Студент должен знать: понятия генеральной и выборочной совокупности; способы графического представления вариационных рядов; понятие точечных и интервальных оценок распределения; формулы оценок характеристик распределения.

Студент должен уметь: строить полигоны и гистограммы статистических распределений; вычислять точечные оценки характеристики распределения; находить интервальные оценки.

Ход занятия

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

6. Генеральная и выборочная совокупности.
7. Статистический дискретный ряд распределения.
8. Статистический интервальный ряд распределения.
9. Полигон и гистограмма.
10. Показатели меры положения (среднее значение, медиана, мода).

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

1. Построить полигон относительных частот, если дискретный ряд распределения представлен в таблице:

x_i	37	38	39	40	41	42	43
m_i	1	5	5	8	15	4	12

Решение. Найдем объем выборки $n = \sum m_i = 50$. Так как относительная частота $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, запишем в таблицу полученные значения:

x_i	37	38	39	40	41	42	43	
m_i	1	5	5	8	15	4	12	
p^*	0,02	0,1	0,1	0,16	0,3	0,08	0,24	Σ=1

Проконтролируем результат, вычислив сумму полученного ряда (по определению $\sum \boldsymbol{p_i^*} = \boldsymbol{1}$). Построим полигон относительных частот.

2. Результаты наблюдений за числом частиц, попавших в счетчик Гейгера в течение минуты, приведены в виде интервального ряда распределения:

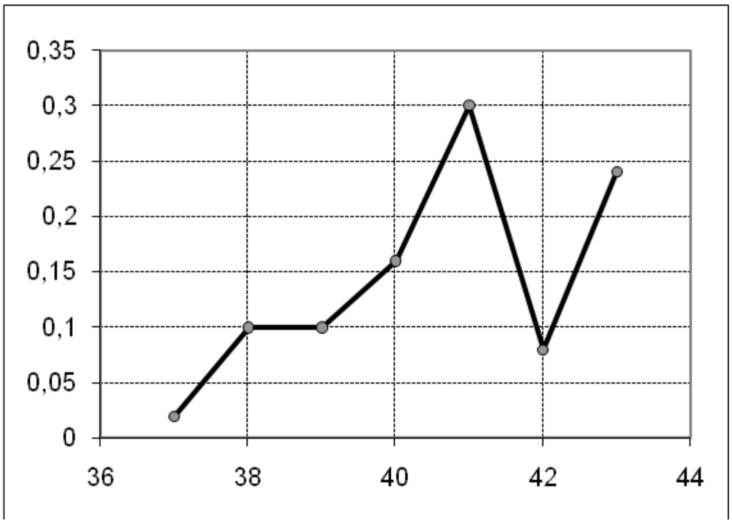
Интервал X	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44	44-48	48-52
m_i	1	4	20	10	8	4	2	1

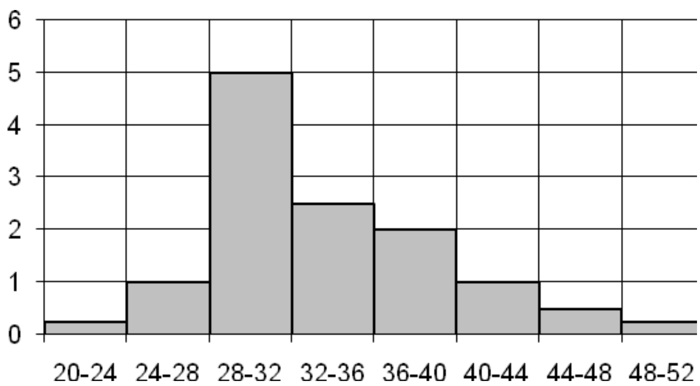
Построить гистограмму частот распределения.

Решение.

Так как гистограмма это фигура, составленная из прямоугольников с основаниями Δx – длина частичного интервала и высотами $\frac{m_i}{\Delta x}$, то запишем в таблице дополнительную строку $\frac{m_i}{\Delta x}$. Величина интервала $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 24 - 20 = 4$, тогда получим таблицу:

Интервал X	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44	44-48	48-52
m_i	1	4	20	10	8	4	2	1
$\dfrac{m_i}{\Delta x}$	0,25	1	5	2,5	2	1	0,5	0,25





3. Найти оценку математического ожидания и несмещенную оценку дисперсии, если дана таблица распределения:

x_i	2	4	5	6
m_i	8	9	10	3

Решение. *Для вычисления характеристик воспользуемся расчетной таблицей:*

x	m	xm	$x_в$-x	$(x_в-x)^2$	$(x_в-x)^2m$
2	8	16	2	4	32
4	9	36	0	0	0
5	10	50	-1	1	10
6	3	18	-2	4	12
	30	120			54

Оценкой математического ожидания является выборочное среднее – среднее арифметическое значений статистического ряда: $\bar{x}_в = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i m_i$; итак,

$\bar{x}_в = \frac{120}{30} = 4$. Несмещенная оценка дисперсии генеральной совокупности:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(\bar{x}_в - x_i\right)^2 m_i\ ;\ s^2 = \frac{54}{30-1} = 1{,}86$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти оценку генеральной средней, несмещенную оценку дисперсии и исправленное среднее квадратическое отклонение по выборке: 289; 203; 243; 210; 251; 224; 220; 211; 246. (Указание. Для расчета использовать формулы без учета частот).
2. Время цветения 100 одинаковых растений (в сутках) даны в таблице:

Фазы цветения	Число цветущих растений (m_i)
5-10	4
10-15	6
15-20	16
20-25	36
25-30	24
30-35	10
35-40	4

Построить гистограмму относительных частот распределения фазы цветения. Какой тип распределения напоминает гистограмма.

1. Дана выборка объема n. Найти объем выборки, оценки характеристик распределения, доверительный интервал с вероятностью 0,99, если статистические данные записаны в таблице:

x_i	*0,3*	*0,5*	*0,6*	*0,8*	*0,9*
m_i	*6*	*10*	*20*	*3*	*1*

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	*2*	*5*	*7*	*10*
m_i	*6*	*12*	*8*	*2*

Найти оценки характеристик распределения. Построить полигон частот.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ВЫБОРОЧНОЙ СОВОКУПНОСТЬЮ НАЗЫВАЕТСЯ

6) Множество объектов, из которых производится отбор для исследования качественного или количественного признака
7) Множество объектов, отбираемых для исследования качественного или количественного признака
8) Количество объектов, из которых производится отбор для исследования качественного или количественного признака
9) Количество объектов, отбираемых для исследования качественного или количественного признака
10) Множество качественных или количественных признаков, подлежащих исследованию

2. УКАЖИТЕ СПОСОБ ОТБОРА, НЕ ТРЕБУЮЩИЙ РАСЧЛЕНЕНИЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ НА ЧАСТИ

6) Типический отбор
7) Серийный типический отбор
8) Простой случайный бесповторный отбор
9) Механический отбор
10) Серийный отбор

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ВАРИАЦИОННЫМ РЯДОМ НАЗЫВАЕТСЯ

6) Перечень частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака
7) Перечень относительных частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака
8) Перечень наблюдаемых значений признака
9) Перечень наблюдаемых значений признака, записанных в возрастающем порядке
10) Перечень частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака, записанных в возрастающем порядке

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СТАТИСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЫБОРКИ НАЗЫВАЕТСЯ

6) Перечень наблюдаемых значений признака
7) Перечень частот, соответствующих наблюдаемым значениям признака
8) Перечень наблюдаемых значений признака и соответствующих им частот
9) Перечень наблюдаемых значений признака и соответствующих им относительных частот
10) Перечень наблюдаемых значений признака и соответствующих им частот или относительных частот

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЛОМАНАЯ ЛИНИЯ, ЗВЕНЬЯ КОТОРОЙ СОЕДИНЯЮТ ТОЧКИ С КООРДИНАТАМИ (X_1, N_1), (X_2, N_2), …, (X_K, N_K), НАЗЫВАЕТСЯ

6) Многоугольником распределения вероятностей
7) Полигоном частот
8) Полигоном относительных частот
9) Гистограммой частот
10) Гистограммой относительных частот

Ответы:1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 5; 5) 2

4. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие погрешности измерений.
2. Среднее арифметическое наблюдаемых значений.
3. Оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего.

4. Формула абсолютной погрешности для прямых измерений.
5. Формула относительной погрешности для прямых измерений.
6. Коэффициент Стьюдента.
7. Доверительный интервал и доверительная вероятность.
8. Построить полигон частот и относительных частот по распределению выборки

x_i	*2*	*3*	*5*	*6*
m_i	*10*	*15*	*5*	*20*

9. Построить гистограмму относительных частот по распределению выборки

Интервал X	*10-15*	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*
m_i	*2*	*4*	*8*	*4*	*2*

Занятие №16

Тема: Абсолютная и относительная погрешности прямых измерений
Цели: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешности прямых измерений.

Студент должен иметь практический опыт: вычисления погрешностей.

Студент должен знать: понятие погрешности измерений; формулы абсолютной и относительной погрешности для прямых измерений, а также формулы вычисления абсолютной погрешности косвенно измеряемой величины.

Студент должен уметь: вычислять среднее арифметическое наблюдаемых значений; оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего; находить коэффициент Стьюдента по таблице; правильно записывать результаты измерений.

Ход занятия

1. **Организационный момент** отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

1. Понятие погрешности измерений.
2. Среднее арифметическое наблюдаемых значений.
3. Оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего.
4. Формула абсолютной погрешности для прямых измерений.
5. Формула относительной погрешности для прямых измерений.
6. Коэффициент Стьюдента.
7. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

1. Известно, что количественный признак x генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=20$ найдены выборочная средняя $\bar{x}_{â} = 5{,}01$ и несмещенная оценка дисперсии $s^2 = 0{,}81$. Определить интервальную оценку математического ожидания с доверительной вероятностью $p=0{,}95$.

Решение. Доверительный интервал для математического ожидания, в который с вероятностью p попадает μ имеет вид: $\bar{x}_в - t_p(f)S_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x}_в + t_p(f)S_{\bar{x}}$.

Найдем оценку среднего квадратического отклонения выборочного среднего:

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}\ ;\ S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0{,}81}{20}} \approx 0{,}2\,.$$

По таблице найдем коэффициент Стьюдента $t_p(f)$.

По условию $p=0{,}95$, число степеней свободы $f = n - 1 = 20 - 1 = 19$. Итак, $t_{0{,}95}(19) = 2{,}093$.

Запишем:

$$5{,}01 - 2{,}093 \cdot 0{,}2 \le \mu \le 5{,}01 + 2{,}093 \cdot 0{,}2\,;$$

$$4{,}59 \le \mu \le 5{,}43\,.$$

2. При исследовании плодов здоровых крыс были получены показатели масса тела плода: 2,58; 1,95; 2,04; 2,46; 2,56; 2,04; 2,46; 2,58; 2,56; 2,58; 3,04; 2,46. Найти приближенное значение величины с вероятностью 0,95.

Решение.

Найдем среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i\ ;\ \bar{x} = \frac{1}{12}\cdot = 29{,}31 = 2{,}4425$$

Найдем абсолютную погрешность:

$$\Delta\bar{x} = t_p(f)\cdot S_{\bar{x}}\text{; вычислим сначала } S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i}{n(n-1)}}\,;$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1{,}0089}{12\cdot 11}} = 0{,}0874\,.$$

Составим расчетную таблицу:

	x_i	m_i	$x_i m_i$	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$(\bar{x} - x_i)^2 m_i$
	1,95	1	1,95	-0,49	0,2401	0,2401
	2,04	2	4,08	-0,4	0,16	0,32
	2,46	3	7,38	0,02	0,0004	0,0012
	2,56	2	5,12	0,12	0,0144	0,0288
	2,58	3	7,74	0,14	0,0196	0,0588
	3,04	1	3,04	0,6	0,36	0,36
Σ		12	29,31			1,0089

Найдем коэффициент Стьюдента $t_{0,95}(11) = 2,20$. Тогда $\Delta\bar{x} = 2,20 \cdot 0,087 = 0,192 \approx 0,20$.

Примечание. При записи результата применяют следующее правило округления: абсолютную погрешность округляют до двух значащих цифр по избытку. В приближенном значении округляют так, чтобы сохранились все надежные цифры и одна сомнительная. Сомнительная цифра находится в том же разряде, что округленная в абсолютной погрешности.

$x \approx 2,40 \pm 0,20$

Относительная погрешность: $E\% = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,20}{2,4} \cdot 100\% = 8,3\%$.

Ответ: приближенное значение случайной величины $x \approx 2,40 \pm 0,20$.

Задания для самостоятельного решения

1. Определить концентрацию сахарозы в растворе, абсолютную и относительную погрешности с вероятностью 0,99. Результаты наблюдений: 2,4; 2,7; 2,5; 2,6; 2,3. Оценить качество измерений.
2. Проведены равноточные измерения электрического сопротивления катушки. Полученные результаты представлены в таблице:

3.x_i	4. ,27	5. ,271	6. ,272	7. ,273	8. ,274
9.m_i	1(	1[illegible]	1[illegible]	1[illegible]	1[illegible]

15. Найти приближенное значение сопротивления, абсолютную и относительную погрешности с доверительной вероятностью 0,99.

16. При фотоэлектроколориметрическом определении концентрации ацетилсалициловой кислоты на основании реакции с сульфатом меди и пиридином были получены следующие результаты: 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,1%. Вычислить среднее значение полученных результатов и абсолютную и относительную погрешности при доверительно при вероятности 0,95.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ГИСТОГРАММОЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЧАСТОТ НАЗЫВАЕТСЯ СТУПЕНЧАТАЯ ФИГУРА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ОСНОВАНИЯМИ КОТОРЫХ СЛУЖАТ ЧАСТИЧНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ДЛИНОЙ H, А ВЫСОТЫ РАВНЫ

1) n_i
2) w_i
3) $\frac{n_i}{n}$
4) $\frac{w_i}{h}$
5) $\frac{n_i}{h}$

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ Θ^* ЕСТЬ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Θ, ТО НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКОЙ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКАЯ ТОЧЕЧНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА, КОТОРАЯ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ РАВЕНСТВОМ

1) $M(\Theta) = \Theta^*$
2) $D(\Theta) = \Theta^*$
3) $M(\Theta^*) = \Theta$
4) $D(\Theta^*) = \Theta$
5) $\sigma(\Theta^*) = \Theta$

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ЕСЛИ ЗАДАНО СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ, ТО ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{n} x_i$
2) $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{n} x_i n_i$
3) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
4) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$
5) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} n_i$

4. УКАЖИТЕ ФОРМУЛУ, ПО КОТОРОЙ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ

1) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i$
2) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} n_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right)^2$
3) $D_B = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} n_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right)^2\right]$
4) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} n_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i n_i\right)^2$
5) $D_B = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} n_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i n_i\right)^2\right]$

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ПО ФОРМУЛЕ $D = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} D_j n_j$, ГДЕ m – ЧИСЛО ГРУПП, НА КОТОРЫЕ РАЗБИТА ВЫБОРКА, ВЫЧИСЛЯЕТСЯ

1) Внутригрупповая дисперсия
2) Межгрупповая дисперсия
3) Групповая дисперсия
4) Общая дисперсия
5) Выборочная дисперсия

5. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

1. Подготовиться к практическому занятию «Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений, оценка качества измерений».
2. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11,6, 9, 8, 10, 7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней, интервальную оценку с вероятностью 0,95.

Занятие №17

Тема: **Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений, оценка качества измерений**

Цели: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешности косвенных измерений.

Студент должен иметь практический опыт: вычисления погрешностей.

Студент должен знать: понятие погрешности измерений; формулы абсолютной и относительной погрешности для прямых измерений, а также формулы вычисления абсолютной погрешности косвенно измеряемой величины.

Студент должен уметь: вычислять среднее арифметическое наблюдаемых значений; оценку средней квадратической погрешности выборочного среднего; находить коэффициент Стьюдента по таблице; правильно записывать результаты измерений.

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

Контрольные вопросы:

4. Понятие погрешности измерений.
5. Формула абсолютной погрешности для косвенно измеряемой величины.
6. Формула относительной погрешности для косвенно измеряемой величины.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Решение примеров по заданной теме	Тетрадь, ручка	Проверка решения

Рассмотреть решение задач:

Алгоритм выполнения манипуляции

Преподаватель на доске объясняет решение примеров по данной теме.

1. Вычислить объем куба с ребром $x \approx (12{,}5 \pm 0{,}05)$ см. Оценить качество измерений.

Решение. Объем куба $V = x^3$; $\overline{V} = (12{,}5)^3 = 1953{,}125$.

Найдем абсолютную погрешность: $\Delta V = |V'_x \cdot \Delta x| = \left|3x^2 \cdot \Delta x\right| = 3 \cdot (12{,}5)^2 \cdot 0{,}05 = 23{,}4375$.

Тогда $V \approx (1950 \pm 24)$см^3.

Найдем относительную погрешность: $E\% = \dfrac{\Delta \overline{V}}{\overline{V}} 100\% = \dfrac{24}{1950} 100\% = 1{,}2\%$.

Ответ: $V \approx (1950 \pm 24)$см^3, качество измерений удовлетворительное.

2. Вычислить объем прямоугольного параллелепипеда, если длины его ребер: $a \approx (5{,}0 \pm 0{,}05)$ см; $b \approx (10{,}0 \pm 0{,}05)$ см; $c \approx (12{,}0 \pm 0{,}05)$ см. Оценить качество измерений.

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$. Тогда $\overline{V} = 5 \cdot 10 \cdot 12 = 600$ см^3.

Найдем абсолютную погрешность: $\Delta V = \sqrt{(V'_a \Delta a)^2 + (V'_b \Delta b)^2 + (V'_c \Delta c)^2}$. Так как $V'_a = (abc)'_a = bc$; $V'_b = (abc)'_b = ac$; $V'_c = (abc)'_c = ab$, то $\Delta \overline{V} = \sqrt{(bc\Delta a)^2 + (ac\Delta b)^2 + (ab\Delta c)^2} = \sqrt{(10 \cdot 12 \cdot 0{,}05)^2 + (5 \cdot 12 \cdot 0{,}05)^2 + (10 \cdot 5 \cdot 0{,}05)^2}$

$\Delta \overline{V} \approx 7{,}158 \approx 7{,}2$ (см^3).

Найдем относительную погрешность: $E\% = \dfrac{\Delta \overline{V}}{\overline{V}} 100\% = \dfrac{7{,}2}{600} 100\% = 0{,}84\%$

Ответ: Объем равен: $V \approx (600 \pm 7{,}2)$см^3; качество измерений хорошее.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь круга с радиусом $r \approx (10{,}0 \pm 0{,}1)$см, считая $\pi \approx 3{,}1416$, т.е. как точное число, погрешность которого мала.

2. Вычислить площадь треугольника с основанием $a \approx (2{,}15 \pm 0{,}02)$ см и высотой $h \approx (3{,}25 \pm 0{,}02)$ см.

3. Вычислить площадь прямоугольника, если измерения длин сторон: $x \approx (12{,}0 \pm 0{,}1)мм$; $y \approx (22{,}0 \pm 0{,}2)мм$.

4. Итоговый контроль: Проводится в виде тестирования знаний студентов с применением бланкового тестирования(3-5 заданий) и/или устного опроса.

Тесты для контроля знаний студентов по данной теме:

1. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО Δ ТАКОЕ, ЧТО |ϴ - ϴ*| < Δ, ГДЕ ϴ - ОЦЕНИВАЕМЫЙ ПАРАМЕТР, ϴ* - ЕГО СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА, НАЗЫВАЕТСЯ

6) Надежностью
7) Доверительной вероятностью
8) Точностью
9) Доверительным интервалом
10) Доверительной границей

2. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НАДЕЖНОСТЬЮ ОЦЕНКИ ϴ* ПАРАМЕТРА ϴ НАЗЫВАЕТСЯ

6) Величина ϴ* - δ, где δ>0
7) Величина ϴ* + δ, где δ>0
8) Интервал (ϴ* - δ; ϴ* + δ)
9) Положительное число δ такое, что |ϴ - ϴ*| < δ
10) Вероятность γ, с которой осуществляется неравенство |ϴ - ϴ*| < δ

3. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИМЕЕТ ВИД:

6) $(\bar{x}_B - \delta;\ \bar{x}_B + \delta)$
7) $(\bar{x}_B - \sigma;\ \bar{x}_B + \sigma)$
8) $(\bar{x}_B - \frac{\sigma}{n};\ \bar{x}_B + \frac{\sigma}{n})$
9) $(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}})$
10) $(\bar{x}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

4. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ [s(1- q); s(1+ q)] ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИМЕНЯЕТСЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ

6) Исправленного стандарта
7) Математического ожидания
8) Выборочной средней
9) Выборочной дисперсии
10) Среднего квадратического отклонения

5. УКАЖИТЕ ВЕРНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ. В ТЕОРИИ ОШИБОК ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ($\bar{x}_B$ - $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$; $\bar{x}_B$ +$\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$) ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ

6) Относительной погрешности измерений
7) Относительной погрешности прибора
8) Истинного значения измеряемой величины
9) Точности измерений
10) Точности прибора

5. Задание на дом.

Вопросы для самоподготовки:

1) Подготовиться к итоговому тестированию.
2) Вычислить объем цилиндра, если высота $h \approx \left(50 \pm 0{,}1\right) мм$, радиус основания $r \approx \left(15{,}0 \pm 0{,}1\right) мм$.

Занятие №18

Тема: Компьютерное тестирование

Цели: определение качества знаний.

Студент должен иметь практический опыт: решения типовых заданий.

Студент должен знать: основные определения и формулировки теорем, методику решения простейших задач.

Студент должен уметь: приводить примеры к вопросам пройденных разделов.

Ход занятия

1. Организационный момент отмечаются отсутствующие, внешний вид студентов, аудитории, сообщается тема, формулируются цели, сообщается план проведения занятия, раздаются методические указания.

2. Оценка знаний студентов (проверка исходного уровня знаний):

***1) Проверка исходного уровня знаний*:** контроль исходного уровня знаний (школьные знания по теме занятия) проводится средствами компьютерного тестирования с применением программного продукта Veral Test.

2) Проверка внеаудиторной самостоятельной работы *планируется и проводится преподавателем на любом этапе занятия (на первом занятии не проводится)*

3. Практическая часть:

Самостоятельная работа студентов:

Схема ориентировочной основы действия

Компоненты действия	**Средства действия**	**Критерии самоконтроля**
Контрольное тестирование	Тетрадь, ручка, карандаш, линейка	Итоговая оценка

Вопросы для теоретического тестирования

1. Понятие функции.
2. Определение предела функции.
3. Определение бесконечно малой функции.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Определение производной функции.
6. Производная сложной функции.
7. Таблица основных формул дифференцирования.
8. Механический и геометрический смысл производной.

9. Определение дифференциала функции.
10. Аналитический и геометрический смысл дифференциала функции
11. Свойства дифференциала функции.
12. Производные и дифференциалы высших порядков.
13. Определение возрастающей /убывающей функции.
14. Необходимое и достаточное условия возрастания/убывания функции.
15. Определение экстремума функции.
16. Понятие локального и глобального экстремумов функции.
17. Необходимое и достаточное условия экстремума
18. Определение критических точек функции.
19. Определение функции двух аргументов.
20. Определение частного и полного приращений функции.
21. Определение частных производных функции двух аргументов.
22. Частные дифференциалы функции двух аргументов.
23. Полный дифференциал функции двух аргументов.
24. Определение первообразной функцией
25. Определение неопределенного интеграла.
26. Свойства неопределенного интеграла.
27. Таблица простейших интегралов.
28. Простейшие методы интегрирования.
29. Определенный интеграл как предел интегральной суммы
30. Свойства определенного интеграла.
31. Геометрический смысл определенного интеграла.
32. Формула Ньютона-Лейбница
33. Задача о площади криволинейной трапеции.
34. Работа переменной силы.
35. Вычисление пути, пройденного телом
36. Понятие испытания, события, виды событий.
37. Определение полной группы событий.
38. Классическая вероятность события
39. Свойства вероятности.
40. Относительная частота события.
41. Статистическая вероятность события.
42. Теорема сложения для несовместных событий
43. Следствия из теоремы сложения.
44. Теорема умножения для независимых событий.
45. Терема умножения для зависимых событий.
46. Формула Бернулли. Формула Пуассона.
47. Определение случайной величины.
48. Дискретная случайная величина.
49. Закон распределения дискретной случайной величины
50. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
51. Непрерывная случайная величина.
52. Функция распределения случайной величины
53. Свойства функции распределения

54. Плотность распределения вероятностей.
55. Характеристики непрерывных случайных величин.
56. Нормальное распределение.
57. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
58. Генеральная и выборочная совокупности
59. Статистический дискретный ряд распределения
60. Статистический интервальный ряд распределения
61. Эмпирическая функция распределения
62. Оценки характеристик распределения
63. Частные производные функции двух аргументов.
64. Частные и полные дифференциалы функции двух аргументов.
65. Определение косвенно измеряемой величины.
66. Абсолютная погрешность косвенных измерений.
67. Относительная погрешность косвенных измерений.
68. Интервальные оценки.
69. Доверительный интервал и доверительная вероятность.
70. Распределение Стьюдента.
71. Нахождение доверительного интервала для оценки μ нормального распределения при неизвестном σ.
72. Погрешности измерений.
73. Истинная, абсолютная и относительные погрешности.
74. Оценка истинного значения измеряемой величины.

4. **Итоговый контроль:** Тесты для контроля знаний студентов по вопросам (ситуационные задачи):

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература				
Основная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л1.1	Павлушков И.В	Основы высшей математики и статистики. [Текст]: учеб.	ГЭОТАР-Медиа, 2008	308
Дополнительная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л2.1		Теория вероятностей и математическая статистика. [Текст] : учеб. пособие для бакалавров 12-е изд.	М.: Юрайт, 2014	20

Л2.2	Ивченко Г.И. Медведев Ю.И.	Введение в математическую и статистику. [Текст]: учеб.	М.: Изд-во ЛКИ, 2014	20
Методические разработки				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л3.1	Стригун Н.С. Воронина С.В. Кошкарова А.Г. Казуб В.Т.	Математика [электронный ресурс]: методическое пособие к практическим занятиям для студентов специальности среднего профессионального образования: 31.02.01 – фармация – Режим доступа: http :// www.pmedpharm.ru	Пятигорск: ПМФИ, 2016	-
5.2. Электронные образовательные ресурсы				
Л4.1	Омельченко В.П.	Математика [Электронный ресурс]: учебник - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа, 2017.	
Л4.2	Павлушков И. В. Розовский Л. В. Наркевич И. А.	Математика [Электронный ресурс]: учебник - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа, 2013.	
Л4.3	Греков Е.В.	Математика [Электронный ресурс] : учебник для фармацевт. и мед. вузов - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа-, 2015	
Л4.4	Павлушков И.В	Основы высшей математики и математической статистики [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ГЭОТАР-Медиа, 2012.	
Л4.5	Баврин И.И Кибзун А. И	Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей [Электронный ресурс] - Режим доступа: www.studmedlib.ru	М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.	
Программное обеспечение				
13. Microsoft Office 365. Договор с ООО СТК «ВЕРШИНА» №27122016-1 от 27 декабря 2016 г.				

14. Kaspersky Endpoint Security Russian Edition. 100149 Educational Renewal License 1FB6161121102233870682. 100 лицензий.
15. Office Standard 2016. 200 лицензий OPEN 96197565ZZE1712.
16. Microsoft Open License :66237142 OPEN 96197565ZZE1712. 2017
17. Microsoft Open License : 66432164 OPEN 96439360ZZE1802. 2018.
18. Microsoft Open License : 68169617 OPEN 98108543ZZE1903. 2019.
19. Операционные системы OEM, OS Windows XP; OS Windows 7; OS Windows 8; OS Windows 10. На каждом системном блоке и/или моноблоке и/или ноутбуке. Номер лицензии скопирован в ПЗУ аппаратного средства и/или содержится в наклеенном на устройство стикере с голографической защитой.
20. Система автоматизации управления учебным процессом ООО «Лаборатория ММИС»
21. Доступ к личному кабинету в системе «4Portfolio». Договор № В-21.03/2017 203 от 29 марта 2017
22. Доступ к личному кабинету в системе «ЭИОС»
23. Система электронного тестирования VeralTestProfessional 2.7. Акт предоставления прав № ИТ178496 от 14.10.2015 (бессрочно)
24. Statistica Basic 10 for Windows Ru License Number for PYATIGORSK MED PHARM INST OF VOLGOGRAD MED ST UNI (PO# 0152R, Contract № IE-QPA-14-XXXX) order# 310209743.

ПЯТИГОРСКИЙ МЕДИКО-ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Министерства здравоохранения Российской Федерации
Медицинский колледж ПМФИ

Кафедра физики и математики

Авторы: Воронина С.В., Стригун Н.С., Болгова Ю.А.

Методические материалы (указания, разработки, рекомендации) для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика».

специальность 33.02.01 «Фармация»

Пятигорск 202___

<u>Тема:</u> Исследование функции на четность и нечетность, нахождение области определения функции

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Построение элементарных графиков функций, преобразования графиков».

Задание 2. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

<u>Тема:</u> Построение элементарных графиков функций

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление производных функций».

Задание 2. Заполнить таблицу «Основные элементарные функции»

№ п/п	*Обозначение функции*	*Область определения*	*Область значений*	*Четность, нечетность*	*Монотонность*	*Периодичность*	*Графики функций*
1.							

<u>Тема:</u> Геометрический и физический смысл производной

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление производной сложной функции».

Задание 2. Найти производную функции:

1. $y=\cos 2x\cdot 2^x+\sqrt{x}-4$
2. $y=\dfrac{x^2}{\ln x+3}$
3. $y=x^2\ln x$
4. $y=x^4\log_5 x+6tg2x+2$
5. $y=\dfrac{tg2x+1}{\cos x}$
6. $y=3\cos 2x+4x^3-6$

<u>Тема:</u> Вычисление производной сложной функции

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции».

Задание 2. Найти производную функции:

1. $f(x)=\sqrt{2x-\mathbf{ln}\,x}$.
2. $f(x)=\mathbf{sin}\sqrt{x}$.
3. $f(x)=\mathbf{ln}\dfrac{1+x}{1-x}$.

Задание 3. Найти дифференциал функции:

1. $f(x)=ln(sin\,x)$.
2. $f(x)=\sqrt{1+x^3}$.
3. $f(x)=xe^{x^2+1}$.

Задание 4. Найти вторые производные следующих функций:

$$f(x)=e^{x^2}.$$

Задание 5. Найти производные второго порядка и записать дифференциалы второго порядка для следующих функции:

$$f(x)=2x\,\mathbf{cos}\,x.$$

<u>Тема:</u> Определение промежутков возрастания и убывания, экстремумов по графику функции

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Нахождение частных производных функции двух переменных».

Задание 2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

1. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.
2. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

<u>Тема:</u> Нахождение частных производных функции двух переменных

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление интеграла методом непосредственного интегрирования».

Задание 2. Дана функция $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$. Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Задание 3. Дана функция $z = x\ln\frac{y}{x}$. Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Тема: Первообразная, правила нахождения первообразных

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление интеграла методом подстановки».

Задание 2. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{8x^4+5}{x}dx$	2. $\int\frac{9x^2-5x}{x}dx$	3. $\int\frac{9x^6-x^3}{x}dx$
4. $\int\frac{8x^8+5}{x^3}dx$	5. $\int(6x^2+7\cos x)dx$	6. $\int(6x^5+7\sin x)dx$
7. $\int(15x^9-7\cos x)dx$	8. $\int(x^8+8\sin x)dx$	9. $\int\sqrt{x^5}dx$
10. $\int\sqrt[5]{x^2}dx$	11. $\int\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}dx$	12. $\int\sqrt[7]{x^9}dx$

Тема: Вычисление неопределенного интеграла методом подстановки

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление определенного интеграла».

Задание 2. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\sin 5x dx$
2. $\int 4^{2x-1}dx$
3. $\int\frac{dx}{(1+2x)^2}$
4. $\int\frac{7dx}{(4x-3)^4}$
5. $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx$
6. $\int\frac{xdx}{x^2+28}$

Тема: Вычисление определенного интеграла методом подстановки

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление площадей с помощью интегралов».

Задание 2. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^3 2x\,dx$
2. $\int_0^2 (x^2+e^x)\,dx$
3. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$
4. $\int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx$
5. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$

Тема: Вычисление площадей с помощью интегралов

Задание 1. Подготовиться к контрольной работе «Дифференциальное и интегральное исчисление».

Задание 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

1. $y = 6x - x^2$ *и осью OX*

2. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2,\ y = 0, x = 1, x = 3$

Тема: Подготовка к контрольной работе

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вероятность случайного события».

Тема: Вероятность полной группы событий

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Теоремы сложения и умножения, вероятность появления хотя бы одного события».

Задание 2. Решить задачи:

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну последнюю цифру. Найти вероятность того, что абонент набрал правильный номер.
2. По данным автопредприятия на 1000 рейсов автобусов в 50 случаются поломки. Найти вероятность поломки одного автобуса.
3. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

4. В лотерее разыгрываются 100 билетов с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного билета не содержит цифры два.

Тема: Теоремы умножения и условная вероятность

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины».

Задание 2. Решить задачи:

1. Два студента независимо один от другого должны определить концентрацию сахара в биологической жидкости с помощью рефрактометра. На выполнение этого задания каждый из них получил по одному допуску. Вероятность провести исследование у первого студента равна 0,8, для второго - 0,4. Преподаватель зарегистрировал один приход. Найти вероятность того, что исследование провел первый студент.

2. Студент Петров знает не все экзаменационные билеты. Что для него выгоднее: отвечать первым или вторым? Число билетов 30, из них Петров знает 25.

3. Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в 6 пробах данная колония микроорганизмов появится четыре раза.

Тема: Вычисление числовых характеристик случайной величины

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Построение полигона и гистограммы статистических распределений, определение медианы и моды».

Задание 2. Решить задачи:

1. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие А, вероятность которого равна Р. Рассматривается случайная величина X - число появления события А. Определить ее характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение (с.к.о.).

2. Медсестра обслуживает 4 больных. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания медсестры первый больной равна 0,9, второй- 0,8, третий - 0,75, четвертый - 0,7. Определить математическое ожидание,

диспепсию и с.к.о. числа больных, которые не потребуют внимания медсестры в течение часа.

Тема: Полигон и гистограмма, среднее арифметическое

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Абсолютная и относительная погрешности прямых измерений».

Задание 2. Построить полигон частот и относительных частот по распределению выборки

x_i	*2*	*3*	*5*	*6*
m_i	*10*	*15*	*5*	*20*

Задание 3. Построить гистограмму относительных частот по распределению выборки

Интервал X	*10-15*	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*
m_i	*2*	*4*	*8*	*4*	*2*

Тема: Доверительный интервал и доверительная вероятность

Задание 1. Подготовиться к практическому занятию «Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений, оценка качества измерений».

Задание 2. Решить задачу:

При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11,6, 9, 8, 10, 7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней, интервальную оценку с вероятностью 0,95.

Тема: Абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений

Задание 1. Решить задачу:

Вычислить объем цилиндра, если высота $h \approx (50 \pm 0{,}1)\ мм$, радиус основания $r \approx (15{,}0 \pm 0{,}1)\ мм$.

Тема: Подготовка к итоговому тестированию и контрольной работе

Задание 1. Подготовиться к итоговому тестированию.